**Tétel:** (Jordan)

Ha $f$ korlátos változású $\Rightarrow$ $f$ előállítható két monoton növekvő fgv. különbségeként.

## Riemann – Stieltjes – integrál
(sztyiltyész)

$\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ $\Rightarrow$ Riemann összeget

IV. 19.      9. előadás

**Def.:** Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $([a,b] \subset \mathbb{R})$ korlátosak és $D := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$; $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$

$$\sigma(f,g,D) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

**Def.:** $f$ Riemann – Stieltjes -integrálható a $g$-re vonatkozóan, ha minden $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beosztássorozathoz tartozó minden

$$\langle \sigma(f,g,D_n) \rangle := \left\langle \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\left(g(x_i^{(n)}) - g(x_{i-1}^{(n)})\right) \right\rangle$$

sorozat konvergens, ahol

$$D_n := \{x_0^{(n)}; x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}, \quad \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$$

$(n = 1, 2 \dots, \quad i = 1, \dots, k_n)$

**Tétel:** Ha a fenti $\langle \sigma(f,g,D_n) \rangle$ sorozatok mindegyike konvergens $\Rightarrow$ határértékük egyenlő.

**Def.:** Ha $f$ Riemann - Stieltjes -integrálható a $g$-re vonatkozóan $\Rightarrow$ a fenti integrálközelítő összegsorozatok közös határértékét az $f$ $g$-re vonatkozó R-S. integráljának nevezzük.

jel.: $\int_a^b f\,dg$ v. $\int_a^b f(x)\,dg(x)$

Mj.: Ha $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x$ $\Leftrightarrow$ R-S. integrálható $g$-re vonatkozóan, ha $f$ Riemann integrálható. (Ilyenkor a két fgv integrálja egyenlő.

$$\int_a^b f(x)\,d(x) = \int_a^b g(x)\,d(x)\ )$$

Tétel: $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ (korlátosak)

1) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ha $\exists \int_a^b f_1 dg$, $\exists \int_a^b f_2 dg \Rightarrow \exists \int_a^b (\lambda f_1 + \mu f_2)\,dg$ és $=$

$= \lambda \int_a^b f_1 dg + \mu \int_a^b f_2 dg$ $\underbrace{\overset{\text{összeadásra vonatkozik}}{\text{additív}} \text{ és } \overset{\text{kiemelhetőség}}{\text{homogén}}}_{\text{lineáris}}$

2) Ha $\exists \int_a^b f dg_1$, $\exists \int_a^b f dg_2 \Rightarrow \exists \int f\, d(\lambda g_1 + \mu g_2)$ és $=$

$= \lambda \int_a^b f dg_1 + \mu \int_a^b f dg_2$.

Tétel: Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású $\Rightarrow \exists \int_a^b f dg$ és $\left|\int_a^b f dg\right| \le K \cdot \underbrace{V(g, [a,b])}_{\text{totális variáció}}$,

ahol $K \in \mathbb{R}_+$ és $|f(x)| \le K$ $\forall x$-re.

Tétel: Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható $\Rightarrow$ ($f$ R-S. integrálható $g$-re vonatkozóan) $\Rightarrow \exists \int_a^b f dg$ és $= \int_a^b f(x) g'(x)\,dx$.

„BIZ": $g'$ folytonos $\Rightarrow g$ korlátos változású $\Rightarrow \exists \int_a^b f dg$

$\exists\ \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] : g(x_i^{(n)}) - g(x_{i-1}^{(n)}) = g'(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$

$\sigma(f, g, D_n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\, g'(\xi_i^{(n)})\, \Delta x_i^{(n)} = \sigma(fg', D_n)$

$\to$ Ez a sorozat konvergens $\Rightarrow$ minden normális felosztássorozat esetén $\sigma(fg', D_n)$ konvergens $\Rightarrow$ R-S. integrálható.

Intervallum feletti additivitás (biz. ugyanúgy, mint valós esetben)

# Görbék ívhossza

Df.: Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Az $f:[a,b] \to \mathbb{R}^k$ folytonos fgv-t görbének nevezzük.

$f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := \underbrace{(\cos t, \sin t)}$

origó kp-ú egység sugarú körvonal.

$g:[0,10\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) := (\cos t, \sin t)$

$R_f = R_g = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}$

$f(a)$ kezdőpont, $f(b)$ végpont (végpontok)

$f$ zárt görbe, ha $f(a)=f(b)$-vel.

Ha $\exists\ t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_1 \neq t_2 : f(t_1) = f(t_2)$, úgy ezt a pontot a görbe kettős pontjának nevezzük.

$f$ egyszerű zárt görbe, ha zárt és csak egy kettős pontja van.

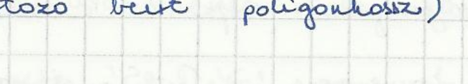
Df.: Az $f$ görbe ív, ha $f$ invertálható.

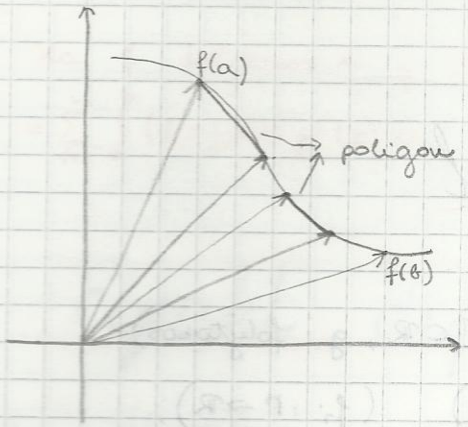
$f$ sima (Jordan) görbe, ha $f$ folytonosan differenciálható.

Df.: Legyen $f:[a,b] \to \mathbb{R}^k$ görbe, $D := \{x_0, x_1 \dots x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$

$L(f,[a,b],D) : \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

($\hat{D}$-hez tartozó beírt poligonhossz)






f rektifikálható, ha a beírt poligonhosszak halmaza felülről korlátos, és ekkor az ívhossz:

$$L(f, [a,b]) := \sup \{ L(f, [a,b], D) : D \in \mathcal{D}([a,b]) \}.$$

Tétel: Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ görbe $\Leftrightarrow$ rektifikálható, ha minden koordináta-fgv-e korlátos változású.

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ folytonosan differenciálható $\Rightarrow$ f rektifikálható és ívhossza $L(f, [a,b]) = \int_a^b |f'|$.

$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad f(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(-\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = \underline{\underline{2\pi r}}$$

# Görbe menti integrál

Legyen $g:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ görbe ($[a,b]\subset\mathbb{R}$, $g$ folytonos)

$\Gamma := R_g$, $f:\Gamma\to\mathbb{R}^m$, $f:=(f_1,\dots,f_m)$ ($f_i:\Gamma\to\mathbb{R}$),

$\langle D_n\rangle : \mathbb{N}\to\mathcal{D}([a,b])$, $D_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)} \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$

$\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ ($i=1,\dots,k_n$, $n=1,2\dots$)

$$\sigma(f,g,D_n) := \sum_{i=1}^{k_n} f(g(\xi_i^{(n)}))(g(x_i^{(n)})-g(x_{i-1}^{(n)})).$$

$f$ integrálható a $g$ görbe mentén, ha az $[a,b]$ minden $\langle D_n\rangle$ normális beosztássorozatához tartozó minden $\langle\sigma(f,g,D_n)\rangle$ sorozat konvergens.

Ekkor a $\langle\sigma(f,g,D_n)\rangle$ sorozatok közös határértékét az $f$ $g$ görbe menti integráljának nevezzük.

jel.: $\int f\,dg$, $\int_\Gamma f\,dg$

**Tétel:** Ha $g$ rektifikálható és $f$ folytonos, akkor $\exists$ $\int f\,dg$ és $= \sum_{i=1}^{n}\int_a^b (f_i\circ g)\,dg_i$, ahol $g:=(g_1,\dots g_m)$, $f:=(f_1,\dots f_m)$

Bizonyítás:

$g$ rektifikálható $\Rightarrow$ mindegyik $g_i$ korlátos változású

$f_i\circ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fgv.

$$\sigma(f,g,D_n) = \sum_{j=1}^{k_n}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i(g(\xi_j^{(n)}))\cdot(g_i(x_j^{(n)})-g_i(x_{j-1}^{(n)})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k_n} f_i(g(\xi_j^{(n)}))\cdot(g_i(x_j^{(n)})-g_i(x_{j-1}^{(n)}))\right)}_{\sigma(f_i\circ g,\, g_i,\, D_n)}$$

konvergens

$f_i\circ g$ folyt. $g_i$ R-S integrálhoz

$g_i$ R-S integrálköz. összegekhez

Tétel: feltételek az előzőnél

f integrálható a g görbe mentén

Ha $f$ folytonos és $g$ folytonosan integrálható $\Rightarrow \int f\,dg$ és

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_a^b (f_i \circ g)(t)\, g_i'(t)\, dt$$

# Egzakt differenciálegyenletek

Def.: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f_1, f_2 : T \to \mathbb{R}$ folytonosak, $f := (f_1, f_2)$.

$F : T \to \mathbb{R}$ primitív fgv-e $f$-nek, ha $F$ folytonosan differenciálható,

és $f = \overset{\text{gradiens}}{\text{grad}}\, F := (\partial_1 F, \partial_2 F)$.

↳ operátor (fgv-hez fgv-t rendel)

Def.: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f_1, f_2 : T \to \mathbb{R}$ folytonosak, $f := (f_1, f_2)$.

Az

(1). $f_1(x, y(x)) + f_2(x, y(x))\, y'(x) = 0$ diffegyenletet egzaktnak

nevezzük, ha $f$-nek $\exists$ primitív fgv-e.

Tétel: Ha (1.) egzakt, úgy a $\varphi : J (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható fgv $\Leftrightarrow$ megoldása (1.)-nek, ha $\exists$ $c \in \mathbb{R}$, hogy $F(x, \varphi(x)) = c$ $\forall x \in J$ esetén, ahol $f := \text{grad}\, F$.

$$f_1(x, \varphi(x)) + f_2(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_1 F(x, \varphi(x)) + \partial_2 F(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \quad \left(g : J \to \mathbb{R}^2,\ g(x) := (x, \varphi(x))\right)$$

$\Rightarrow (F \circ g)'(x) = 0$ a Lagrange-f középértéktételből következik, hogy ez konstans fgv.

Def.: A $T \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő, ha minden $T$-beli egyszerű zárt görbe belseje része $T$-nek.

összefüggő, mert: nem egyszeresen összefüggő


Tétel: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány $f_1, f_2 : T \to \mathbb{R}$ folytonosak, $f := (f_1, f_2)$.
Ha $T$ egyszeresen összefüggő és $f_1, f_2$ folytonosan differenciálhatók, továbbá $\partial_2 f_1(x,y) = \partial_1 f_2(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in T$ esetén, akkor $f$-nek $\exists$ primitív fgv-e.
Ha $F$ primitív fgv-e $f$-nek, akkor $F(x,y) = \int f\, dg$, ahol $g$ olyan rektifikálható és invertálható görbe, amely a $T$ egy tetszőlegesen rögzített $u_0$ pontját köti össze a $T$ $u := (x,y)$ pontjával.

Bizonyítás: —

# Integráló tényező keresése

Tfh.: (I.) nem egzakt

$\mu : T \to \mathbb{R}$ folytonosan diff-ható, $\mu(x,y) \neq 0$ $\forall$ $(x,y) \in T$

$$\text{(II.)} \quad \mu(x,y(x))\, f_1(x,y(x)) + \mu(x,y(x))\, f_2(x,y(x))\, y'(x) = 0.$$

Ha $T$ egyszeresen összefüggő, $f_1, f_2$ folytonosan diff-hatók, úgy (III.) $\partial_2(\mu f_1) = \partial_1(\mu f_2)$ esetén (II.) egzakt.

$$\text{(III.)} \quad (\partial_2 \mu) \cdot f_1 + \mu\, \partial_2 f_1 = (\partial_1 \mu)\, f_2 + \mu\, \partial_1 f_2$$

$$\mu(\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) = (\partial_1 \mu) f_2 - (\partial_2 \mu) f_1$$

„$\mu(x,y) = \mu(y)$"

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1}{f_1}$$

„$\mu(x,y) = \mu(x\cdot y)$" $\qquad t := x\cdot y$

$$\mu(t)(\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) = \mu'(t)\, y\, f_2 - \mu'(t)\, x\, f_1$$

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2}{y f_2 - x f_1}$$