T.: Ha f multiplikatív számelméleti fgv $\Rightarrow f(1)=1$.
(és nem azonosan 0.)

BIZ.:

$\exists\, n \in \mathbb{N}^+$, h. $f(n) \neq 0$

$$f(n) = f(1\cdot n) = f(1)\cdot f(n)$$

$$\underbrace{f(n)}_{\neq 0}\underbrace{[1-f(1)]}_{=0} = 0$$

Def.:

f számelméleti fgv additív, ha $\forall\, a,b \in \mathbb{N}^+$-ra, ha $(a,b)=1 \Rightarrow f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$

$\forall\, a,b \in \mathbb{N}^+$-ra, $f(a\cdot b) = f(a) + f(b) \Rightarrow f$ totálisan additív számelméleti fgv.

KÖV:

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ $(\alpha_i \geq 1)$

f additív $\quad f(n) = \sum_{i=1}^{r} f(p_i^{\alpha_i})$

f totálisan add. $\quad f(n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(p_i)$

T: Ha f additív számelm-i fgv $\Rightarrow f(1)=0$.

BIZ.: ✓

pl. logaritmus: totálisan additív számelm-i fgv.

$\log: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

pl.: (Erdős Pál) tétel: Ha f totálisan additív szig mon növekvő $\Rightarrow$

$f \equiv \log$

$\Downarrow$

nem lehet más mint valamilyen alapú log.

Erdős-tétel:

BIZ. (lsd. ff)

Nevezetes számelméleti fgv-ek

e $\quad e(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

i $\quad i(n) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ 0, \text{ ha } n \geq 2 \end{cases}$

u $\quad u(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

d $\quad$ n pozitív osztóinak száma $\rightarrow d(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} 1$ $\rightarrow$ számoljuk meg, hogy n-nek hány pozitív osztója van.

σ $\quad$ összeadjuk az osztókat $\sigma(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} d$ ($\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak az összege)

φ $\quad$ Euler-féle φ fgv. $\varphi(n) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ |P_n|, \text{ ha } n \geq 2 \end{cases}$ $\varphi(n)$ a $0, 1, 2 \ldots n-1$ sorozatból az n-hez relatív prímek számát jelöli

mi ω $\quad \omega(n) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n = 1 \\ r, \text{ ha } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \; (\alpha_i \geq 1) \end{cases}$ hány különböző prímszám van a prímfaktorizációs alakban.

khi X $\quad X(n) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n = 1 \\ \sum_{i=1} \alpha_i, \text{ ha } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$ jelöli az összes prímszámát

λ $\quad$ Liouville-f. fgv. $\lambda(n) = (-1)^{X(n)}$

Λ $\rightarrow$ vagy lambda $\quad$ Von Mangoldt-fgv $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \text{ ha } n = p^{\alpha} \; (\alpha \geq 1) \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$ $\rightarrow$ csak 1 prímhatvány

mi μ $\quad$ (möbiusz) Moebius-fgv. $\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ (-1)^r, \text{ ha } n = p_1 \cdots p_r \; (p_i \neq p_j, \text{ ha } i \neq j) \\ 0, \text{ ha } \exists p \text{ prím, h. } p^2 \mid n \end{cases}$

Mj: néhol ω helyett ν jelölést használnak.

-"- X helyett Ω -"-

(„Andrea-fgv" $\quad a(n) := \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ 0, \text{ ha } 3 \mid n \\ 29, \text{ ha } 3 \nmid n \text{ és } n \neq 1 \end{cases}$)

Tétel:

Multiplikatív	additív	se nem multipl. se nem add.
e, i, u (tot)	ω	Λ $\quad$ a
d, σ, φ	X (tot)	$a(7 \cdot 4) = 29 \neq a(7) \cdot a(4) = 29^2$
λ (tot)		
μ		

BIZ.: többi (lsd HF)

$d; \sigma$ multiplikatív

$d(1) = \sigma(1) = 1$ ✓

$a, b \in \mathbb{N}^+$ $(a,b)=1$ $d \in \mathbb{N}^+$, úh. $d \mid a \cdot b \Rightarrow d = d_1 \cdot d_2$,

ahol $d_1 \mid a$, $d_2 \mid b$
$(d_1, d_2) = 1$

a pozitív osztói: $d_1 = 1, d_2 \dots d_{d(a)}$

b pozitív osztói: $\delta_1 = 1, \delta_2 \dots \delta_{d(b)}$

$a \cdot b$ poz. osztói
$$\left.\begin{matrix} d_1 \cdot \delta_1, d_1 \cdot \delta_2 \dots d_1 \cdot \delta_{d(b)} \\ d_2 \delta_1, d_2 \delta_2 \dots d_2 \cdot \delta_{d(b)} \\ \vdots \\ d_{d(a)} \delta_1, d_{d(a)} \delta_2 \dots d_{d(a)} \cdot \delta_{d(b)} \end{matrix}\right\} d(a \cdot b) = d(a) \cdot d(b)$$

$\sigma(a \cdot b) = d_1 \sigma(b) + d_2 \sigma(b) + \dots$

$\dots + d_{d(a)} \sigma(b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

$\Downarrow$

$d(p^\alpha) = ?$

$\sigma(p^\alpha) = ?$

p^α poz. osztói: $1, p, p^2, \dots p^\alpha \Rightarrow d(p^\alpha) = \alpha + 1$

$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ → (mértani sorozat összegképlete)

mivel multiplikatívak, elegendő ismerni prímhelyeken.

$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \Rightarrow d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p - 1}$$

Tökéletes szám: (41. tétel)

$a \in \mathbb{N}^+$ tökéletes, ha $\sigma(n) = 2n$

p $= 2\cdot 6 = \underbrace{1+2+3}_{}+6$

gyög számainkiéa
nevesítési osztók → összege $= 6$.

⇓

6 TÖKÉLETES SZÁM!

Mj.: Páratlan tökéletes szám NEM ISMERT!

Tétel: n páros szám ⟺ tökéletes, ha

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) \text{ alakú, ahol } p \text{ és } \underbrace{2^p-1}_{\text{Mersenne szám}} \text{ is prím.}$$

Mersenne prím ⇒ 34db-ot ismer ma a matematika.

BIZ.:

a, Ha n ilyen alakú ⇒ n tökéletes (Euklidész) (~300 körül)

b, Ha n páros tökéletes szám ⇒ n ilyen alakú (Euler) (~1800 körül)

b; Legyen $n = 2^\alpha \cdot m$ alakú, ahol $\alpha \geq 1$ és m páratlan

$$\sigma(n) = 2n \Rightarrow 2^{\alpha+1}\cdot m = \sigma(2^\alpha)\cdot\sigma(m) = \frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1}\cdot\sigma(m)$$

$$2^{\alpha+1}\cdot m = (2^{\alpha+1}-1)\,\sigma(m)$$

(szomszédos számok tovább nem egyszerűsíthető ⇒ relatív prímek)

$$\left.\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1} = \frac{\sigma(m)}{m}\right\} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \sigma(m) = k\cdot 2^{\alpha+1}$$

$$m = k\cdot(2^{\alpha+1}-1)$$

$$m = k\cdot 2^{\alpha+1} - k$$

$\sigma(m) = m + k$ ahol $m | m$ és

⇓ $k | m$

Ez csak úgy lehetséges, ha prím (akkor van 2 osztója)

⇓

m prím és $k = 1$.

⇓

$m = 2^{\alpha+1} - 1$ prím

⇓

$\alpha + 1 = p$ prím

$\Downarrow$

$\alpha = p-1$

(Osztókban)

Bővelkedő ill. nélkülöző számok.

$\Downarrow$ hiányos

$\sigma(n) > 2n$ $\sigma(n) < 2n$.

III. 25. 7. előadás

$m, n \in \mathbb{N}^+$

m és n barátságos (baráti) számpárok, ha $\sigma(m) = \sigma(n) = m+n$

Abdul

Hassan Thabit ben Korach (IX. sz) - féle elégséges feltétel:

$p_n := 3 \cdot 2^n - 1$; $q_n := 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$

Ha $p_{(n-1)}$, p_n q_n egyszerre prímek $\Rightarrow$ az $a = 2^n p_{n-1} p_n$ és $b = 2^n q_n$ barátságos számok.

pl.: $n = 2$

$p_1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$p_2 = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$

$q_2 = 9 \cdot 2^{2 \cdot 2 - 1} - 1 = 71$

$a = \underset{4}{2^n} \cdot \underset{5}{p_{n-1}} \cdot \underset{11}{p_n} = 220$ $b = 4 \cdot 71 = 484$

B.

f: Euler-féle (f-fgv)

$(a,b)=1 \Rightarrow f(ab)=f(a)\cdot f(b)$ tehát multiplikatív

biz.: lsd fk

$f(p)=p-1$

$n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}\quad f(n)=\prod_{i=1}^{w}\left(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1}\right)$

ω (additív)

Ω (tot. additív)

BIZ

$\omega(1)=0$

$(m,n)=1 \Rightarrow \omega(m\cdot n)=\omega(m)\cdot\omega(n)$

$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$

$n=q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}\qquad (p_i\neq q_j)$

$\omega(m\cdot n)=r+t$

$\omega(m)=r$

$\omega(n)=t$

— o —

$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ tot. multiplikatív

$m,n\in\mathbb{N}^+$

$\lambda(m)=(-1)^{\Omega(m)}=(-1)^{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i}$

$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}=(-1)^{\sum_{i=1}^{r}\beta_i}$

$\lambda(m\cdot n)=(-1)^{\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i+\beta_i)}=(-1)^{\Sigma\alpha_i}\cdot(-1)^{\Sigma\beta_i}=\lambda(m)\cdot\lambda(n)$

$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$

$n=p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r}$

$m\cdot n=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r}$

$\lambda(1)=1$

— o —

(Moebius) multiplikatív

$\mu(1) = 1$ ✓

$- m = 1, \ n > 1$ $\qquad \mu(m \cdot n) = \mu(1 \cdot n) = 1 \cdot \mu(n) = \mu(1) \cdot \mu(n)$

$- m > 1$ és $n > 1$ $\qquad (m,n) = 1$

$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$

$n = q_1^{\beta_1} \cdots q_t^{\beta_t}$

1, $\alpha_i = 1, \ \beta_j = 1, \ \forall 1 \le i \le r, \ 1 \le j \le t$-re

$\mu(m \cdot n) = (-1)^{r+t}$

$\mu(m) \cdot \mu(n) = (-1)^r \cdot (-1)^t = (-1)^{r+t} = \mu(m \cdot n)$

2, $\exists$ i vagy j, hogy $\boxed{\alpha_i > 1}$ v. $\beta_j > 1$.
(valamelyik tényezőben valamelyik prímnek nagyobb hatványon szerepel)

$\mu(m \cdot n) = 0 \qquad \mu(m) = 0 \qquad \mu(m \cdot n) = \underset{0}{\mu(m)} \cdot \mu(n)$

Legyen $\quad D := \{ f \mid f$ számelméleti fgv $\}$

$f \cdot g \in D \qquad (f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$

Dirichlet-féle konvolúciós szorzás $(*)$

$\underbrace{f, g}_{\text{fgv.}} \in D \qquad (f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$

egymásnak társosztói

Pl.:

$f(n) = n+2$

$g(n) = 3^n$

$$(f*g)(\underset{\downarrow\ 6\text{ helyen}}{6}) = \underbrace{f(1)\cdot g(6)}_{3\cdot 3^6} + \underbrace{f(2)\cdot g(3)}_{4\cdot 3^3} + \underbrace{f(3) g(2)}_{5\cdot 3^2} + \underbrace{f(6)\cdot g(1)}_{8\cdot 3}$$

— o —

Tétel : $(D,*)$ kommutatív, egységelemes félcsoport

Bz.: $*$: asszociatív

: komm. } kézenfekvő (Mf Vk)

: egységelem

asz.: $f,g,h\in D$ $(f*g)*h = f*(g*h)$

$$((f*g)*h)(n) \doteq \sum_{\substack{d\mid n \\ d_1\cdot d_2 = n}} \underbrace{(f*g)(d)}_{\sum_{d'\mid d} f(d')\cdot g\left(\frac{d}{d'}\right)} \cdot h\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1)\cdot g(d_2)\cdot h(d_3)$$

Valós számokkal a szorzás asszociatív

egys.

i fgv. az egységelem

$\forall f\in D$ $i*f = f$

$n=1$: $(i*f)(1) = i(1)\cdot f(1) = 1\cdot f(1) = f(1)$ ✓

$n>1$: $(i*f)(n) = i(1)\cdot f(n) + \sum_{\substack{d\mid n\\ d>1}} \underbrace{i(d)}_{0}\cdot f\left(\frac{n}{d}\right)$

1-nél nagyobb helyettesítési értékeknél i fgv. 0.

$(i*f)(n) = f(n)$

Tétel: $f \in D$-nek $\Leftrightarrow \exists\, f^{-1}$ inverze, ha $f(1) \neq 0$.

(egyetlen additív fgv-nek sincs inverze)

BIZ: 1, $\exists\, f^{-1} \Rightarrow f(1) \neq 0$

$$(f * f^{-1})(n) = i(n)$$

pl.: $n = 1$ $\qquad (f * f^{-1})(1) = \underline{f(1) \cdot f^{-1}(1)} = i(1) = \underline{1}$

$$\Downarrow$$

$$f(1) \neq 0$$

2, $f(1) \neq 0 \Rightarrow \exists\, f^{-1}$ (konstrukciós elv)

$(f * f^{-1})(1) = i(1)$ $\rightarrow$ ezért inverze

$$f(1) \cdot f^{-1}(1) = 1$$

$$\boxed{f^{-1}(1) := \frac{1}{f(1)}}$$

$f^{-1}(2) =$

$$\underbrace{(f * f^{-1})(2)} = i(2) = 0$$

$$f(1) \cdot f^{-1}(2) + f(2) \cdot f^{-1}(1) = 0$$

$$\boxed{f^{-1}(2) := -\frac{f(2) \cdot f^{-1}(1)}{f(1)}}$$

⋮

teljes indukció ✓

minden helyen ki tudjuk számolni $\Rightarrow \exists$ a fgv.

Inverziós formulák:

$f, f^{-1} \in D$; $g, h \in D$

~~Ha~~ $f * g = h \iff g = f^{-1} * h$

$$\underbrace{(f^{-1} * f) * g}_{\underbrace{i}_{g}} = f^{-1} * h$$

Tétel: Az e és μ számelméleti fgv egymás inverzei $(D, *)$-ban.

BIZ.: $e \cdot \mu = i$

$n = 1$: $(e * \mu)(1) = i(1)$

$e(1) * \mu(1) = i(1)$

$1 \cdot 1 = 1$ ✓

$n \geq 1$: $(e * \mu)(n) = \sum_{d|n} e(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) =$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) = \underbrace{\mu(1)}_{1} + \underbrace{\mu(p_1) + \mu(p_2) + \dots \mu(p_r)}_{-\binom{r}{1} \text{ darab}} + \mu(p_1 p_2) +$$

$$\underbrace{+ \mu(p_1 p_3) + \dots \mu(p_{r-1} p_r)}_{+\binom{r}{2}} \dots + \underbrace{\mu(p_1 p_2 \cdots p_r)}_{(-1)^r \binom{r}{r}} + \dots + \underset{\Downarrow}{0} = 0$$

a 2. hatványnál $\mu(p) \Rightarrow$ mindig 0

Pascal Δ r-dik sorában lévő binomiális együtthatók váltakozó előjelű összege $= 0$.

Möbius-féle inverziós formula:

$f, g \in D$

$$\boxed{e * f = g \iff f = \mu * g}$$

$\Downarrow$

$g = e * f$

$$g(n) = \sum_{d|n} e(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d)$$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

g az f-nek az összegzési fgv-e. f a g-nek Möbius-féle transzformáltja