Tétel: Racionális számok pontosan első rendben approximálhatók.

$\alpha \in \mathbb{Q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$; $q > 0$; α pontosan 1. rendben approximálható.

BIZ.:

- nézzük $\varepsilon = 1$-re

$\alpha \in \mathbb{Q}$ $\quad \alpha = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{(a,b) = 1}$

$ax - by = 1$ diof. egyenlet megoldható és végtelen sok megoldás van.

jelöljön egy megoldást:

$y = p$, $x = q$

$a \cdot q - b \cdot p = 1 \Rightarrow |a \cdot q - bp| = 1 \quad / : |bq|$

$$0 < \Big|\underbrace{\tfrac{a}{b}}_{\alpha} - \tfrac{p}{q}\Big| = \frac{1}{|b||q|} = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{q} \le \frac{1}{q} < \frac{2}{q}$$

$$c = c(\alpha) = 2$$

- $\varepsilon > 1$ rendben nem approximálható

ind. Tfh: $\varepsilon > 1$ rendben appr.-ó

$$0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^{\varepsilon}}$$

$$0 < \underbrace{|aq - pb|} < \frac{c|b|q}{q^{\varepsilon}} = \frac{c|b|}{q^{\varepsilon - 1}} \to 0$$

végtelen sok ilyen q létezik.

Ez egész, de ez ellentmondás!

$$0 < |aq - bq| < 0$$

Tétel: (Dirichlet)

Minden irracionális α esetén $\exists$ egy c α-tól függő $(0 < c(\alpha) \leq 1)$ pozitív konstans úgy, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ végtelen sok p, q egész esetén.

BIZ: — (előző évi ell)

Megj.: Minden irracionális szám legalább másodrendben approximálható

A Pell-egyenlet megoldása

Def.: Pell-egyenlet: $x^2 - Dy^2 = 1$ egyenlet, ahol $D \in \mathbb{Z}$ és az egyenlet $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldásait keressük.

$\left.\begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük

- Ha $D = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ és y tetszőleges egész megoldások
- Ha $D < 0 \Rightarrow x = \pm 1$ $y = 0$ megoldás illetve $D = -1$ esetén $x = 0$ és $y = \pm 1$ megoldások.
- Ha D négyzetszám (d^2), ahol $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x + dy)(x - dy) = 1 \Rightarrow |x + dy| = 1$, $|x - dy| = 1$

Aminek további esetben véges számú összes megoldása könnyen megadható.

Tétel:

Ha $D > 0$ és $D \neq d^2$ (nem teljes négyzet) $\Rightarrow$ az $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell egyenletnek van nem triviális megoldása.

BIZ: — Dirichlet tételéből következik (lsd. Tk)

Def: Az (u, v)-t alapmegoldásnak nevezzük, ha $(u, v) \in \mathbb{Z}^+$ és $u^2 - Dv^2 = 1$ és $\forall$ $x, y > 0$ megoldás esetén $x + \sqrt{D}y \geq u + \sqrt{D}v$.

Megj.: Ilyen alapmegoldás nyilván létezik és egyértelműen meghatározott.

②

Tétel:

Legyen $D>0$ egy nem teljes négyzet természetes szám.
Ekkor az $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek végtelen sok (x,y) egész megoldása van.
Ha (u,v) az egyenlet alapmegoldása $\Rightarrow$ az összes megoldásai azon (x,y) számpárok, melyeket az $x+\sqrt{D}y = \pm(u \pm \sqrt{D}v)^n$ egyenlőség definiál, ahol $n = 0,1,2\ldots$ értékeket vehet fel.