TK: Rimány: Matematikai analízis!

„Minden tudomány annyit ér, amennyi a matematika benne."

létezik, van olyan: $\exists$

minden, bármely: $\forall$

Alapfogalmak:

Halmaz, elem, egy elem eleme egy halmaznak

jel: A, B, C, H, a, b, c; $a \in A$, $b \notin C$

ha sok halmaz van: A_1, A_2

$\mathcal{A}$: „olyan halmaz, amelynek az elemei is halmazok"

↳ írott nagy betűvel jelöljük

Megállapodás 1.: Létezik olyan halmaz, amelynek nincs eleme. Ezt a halmazt üreshalmaznak nevezzük. jel: $\emptyset$

2.: A és B halmazok egyenlők, ha $x \in A$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x \in B$

Def.: Akkor mondjuk, hogy A halmaz részhalmaza B halmaznak, ha minden $\forall$ $x \in A$-ból $x \in B$ következik.

jel: $A \subset B$

Def.: Akkor mondjuk, hogy az A halmaz valódi részhalmaza B-nek, ha az $A \subset B$ és $A \neq B$.

3.: Legyen $T(x)$ egy tulajdonság, amely minden dologról eldönthető, igaz rá, vagy sem.

1 Legyen A egy adott halmaz. Ekkor létezik egy olyan halmaz, amelyben olyan x elemek vannak, amelyekre $x \in A$ és teljesül rá a T tulajdonság.

jel.: $\{x \in A \mid T(x)\}$

$\{x \mid x \in A \wedge T(x)\}$

pl.: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 5\}$ v. $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 1 < n < 7$

4. Ha A és B adott halmazok, akkor létezik olyan halmaz, amelynek A és B elemei, de más elemei nincsenek.

5. (Axioma = megállapodás)

Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, ekkor létezik olyan halmaz, amelynek (az) egy x elem akkor és csak akkor eleme, ha létezik egy olyan $A \in \mathcal{A}$ és $x \in A$.

Ezt a halmazt a halmazrendszer uniójának vagy egyesítésének nevezzük.

Def.: A és B halmaz unióján azt az $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

sorhalmazos jel.: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ $\quad \cup \mathcal{A}$ $\quad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

véges sor — végtelen sor — bármikor

6. Legyen A egy adott halmaz, ekkor létezik olyan halmaz, amelynek minden eleme A-nak részhalmaza. Ezt a halmazt az A halmaz hatványhalmazának nevezzük.

jel.: $\mathcal{P}(A)$

pl.: $A := \{1; 2; 3\}$ $\quad 2^n$

$\mathcal{P}(A) := \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{2;3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{1;2;3\}\}$

A és B különbségén az

Def.: Akkor mondjuk, hogy A és B $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ halmazt értjük.

Def.: Legyen X adott halmaz és $A \subset X$. Ekkor $X \setminus A$ halmazt az A halmaz X-re vonatkoztatott komplementerének nevezzük.

Def.: Legyen $\mathcal{A}$ egy adott halmazrendszer, amelynek egy x elem akkor és csak akkor eleme, ha minden A beli $\mathcal{A}$ esetén $(\forall A \in \mathcal{A})$ $x \in A$. Ezt a halmazt a halmazrendszer metszetének nevezzük.

Def.: A és B halmazok metszetén az $A \cap B$ halmazt értjük, ahol:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

jel.: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$; $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$; $\bigcap \mathcal{A}$; $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

Def.: Akkor mondjuk, hogy A és B halmazok diszjunktak, ha a metszetük üreshalmaz. $(A \cap B = \emptyset)$

Def.: Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ halmazrendszer páronként diszjunkt, ha az $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ $\forall i; j$ (bármely olyan i és j esetén, amire igaz, hogy nem egyenlőek.)

Tétel: X egy adott halmaz és $A, B \subset X$. $\Rightarrow$ (1) $A = B \Leftrightarrow$, ha $\bar{A} = \bar{B}$ (komplementer)

(2) $A \subset B \Leftrightarrow$, ha $\bar{B} \subset \bar{A}$

Tétel: Legyen X egy adott halmaz. Ekkor bármely $A, B, C \subset X$ halmaz esetén érvényesek a következők:

(1) $A \cup B = B \cup A$
(2) $A \cap B = B \cap A$
$\Big\}$ kommutativitás

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$\Big\}$ asszociativitás

(4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$\Big\}$ disztributivitás

(5) $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$ $\quad$ idempotens

(6) $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

(7) $A \cup X = X$ $\quad A \cap X = A$

(8) $A \cup \bar{A} = X$ $\quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

Tétel: Legyen X adott halmaz és $A, B \subset X$. $\Rightarrow$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

de Morgan-féle egyenlőségek azonosságok

Def.: Legyenek A és B adott halmazok. A és B halmazok Descartes-szorzatán értjük az $A \times B$-vel jelölt halmazt, ahol:

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A ; y \in B\}$ halmazt értjük

Def.: A és B halmazok Descartes-szorzatának valamely nem üres részhalmazát binér relációnak nevezzük.

Mj.: (1) $\quad \varrho \subset A \times B \Rightarrow$ binér relációnak nevezzük

(2) reláció megadása

A, B megadása

$\varrho \subset A \times B$ $\qquad$ $(x ; y) \in \varrho$, akkor és csak akkor, ha $y = 2x$

reláció neve $\qquad$ v. mennyi

pl.: „ϱ reláció x-hez y-t rendeli hozzá"

„ $\varrho(x) = y$ "

(3) Ha $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ $\Rightarrow A \times B = B \times A \Leftrightarrow$, ha $A = B$

Def.: Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy binér reláció. A ϱ értelmezési tartományán azt a

$D_\varrho = \{x \mid x \in A$ és $\exists y \in B$ úgy, hogy $(x ; y) \in \varrho\}$

Def.: Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy binér reláció

ϱ értékkészletén azt az

$R_\varrho = \{y \mid y \in B$ és $\exists x \in A$, úgy, hogy $(x, y) \in \varrho\}$ halmazt értjük.

pl.:

$A := \{a, b, c\}$ $\qquad$ $A \times B := \{(a ; c) ; (b ; c) ; (c ; c) ; (b, c)(b ; d) ; (c ; d)\}$

$B := \{c ; d\}$

$\rho = \{(a,c); (a,d); (c;d)\}$ → binér reláció

$D_\rho = \{a; c\}$ $R_\rho = \{c; d\}$

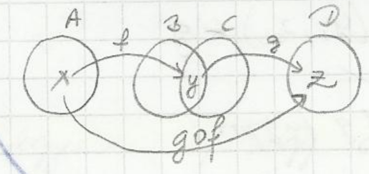
Def.: Legyen $\rho \subset A \times B$ egy binér reláció. A ρ <u>inverzén</u> a ρ^{-1} halmazt értjük, ahol $\{(y;x) \mid x \in A, y \in B, (x;y) \in \rho\}$.

Pl.: $\rho^{-1} = \{(c;a);(d;a);(d;c)\}$ → lásd: előző példa alapján

Def.: Legyen $f \subset A \times B$ és $g \subset C \times D$ binér reláció.

Ekkor a $g \circ f$ <u>összetett relációu</u> azt a halmazt értjük, ahol:

$$g \circ f := \{(x;z) \mid x \in A, z \in D \text{ és } \exists\, y \in B \cap C \text{ úgy, hogy } (x;y) \in f, (y;z) \in g\}$$



Def.: $f \subset A \times B$ binér relációt <u>függvénynek</u> nevezzük, ha $(x,y) \in f$ és $(x;z) \in f$ esetén $y = z$

Mj.: (1): Ha $D_f = A$, $\forall\, x \in A$-hoz egy és csak egy $y \in B$ tartozik úgy, hogy $(x;y) \in f$

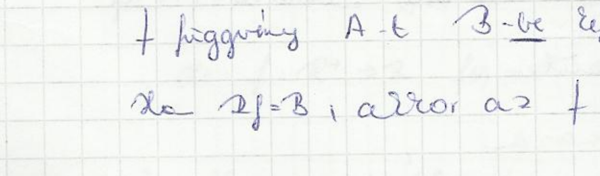
(2): Ha $D_f = A$, $f \subset A \times B$ jelölés helyett az $f: A \to B$ jelölést használjuk

(3): Azt a jelölést: $f \subset A \times B$ függvény $(x,y) \in f$, ekkor y-t $f(x)$-nek nevezzük ($f(x) = y$), „f függvény x-hez tartozó értéke."

(4): $f: A \to B$ $f(x) := y$: függvény megadása

(5): Ha az f függvény értékkészlete részhalmaza B-nek, akkor az
$R_f \subset B$
f függvény A-t B-<u>be</u> képezi.

Ha $R_f = B$, akkor az f függvény A-t B-<u>re</u> képezi.



(6): $(x;y) \Rightarrow P(x;y)$ síkon $f \to$ gráf

minden x, y-hoz egy pontot rendelünk a síkon, f-hez gráfot rendeszünk.

Tétel: Ha $f \in A \times B$ és $g \in C \times D$ függvények $\Rightarrow g \circ f$ összetett reláció is függvény

Mj.: f-et belső függvénynek, g-t külső függvénynek nevezzük.

Bizonyítás:

$(x;z_1) \in g \circ f$ és $(x;z_2) \in g \circ f$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Létezik olyan y_1, amely $\in B \cap C$ úgy, hogy $(x;y) \in f$ és $(y;z_1) \in g$

$\exists$ olyan $y_1 \in B \cap C$ úgy, hogy $(x;y_1) \in f$ és $(y_1;z_2) \in g$

mivel f függvény

mivel g függv.

$y = y_1$

$\underline{\underline{z_1 = z_2}}$ q.e.d

Def.: Legyen A egy adott halmaz. Az $f \subset A \times A$ binér relációt ekvivalencia relációnak nevezzük, ha igazak a következők:

- $x f x$ ($(x;x) \in f$) $\forall x \in A$
- Ha $x f y \Rightarrow y f x$ $\forall x;y \in A$ esetén

  x f relációban van y-nal
- Ha $x f y$ és $y f z \Rightarrow x f z$ $\forall x;y;z \in A$ esetén

Mj.: Az előző tulajdonságokat rendre reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságnak nevezzük.

pl.: A halmaz a sík háromszögeinek halmaza

$f \subset A \times A$ $(x,y) \in f \Leftrightarrow x$ egybevágó y-nal.

Def.: Legyen A adott halmaz

$f \subset A \times A$ binér relációt rendezési relációnak (rendezés) nevezzük, akkor érvényesek:

(1) • $x f x$ $\forall x \in A$: reflexív

(2) • Ha $x f y$ és $y f x \to x = y$ $\forall x, y \in A$ antiszimm.

(3) • Ha $x f y$ és $y f z \Rightarrow x f z$ $\forall x, y, z \in A$ tranzitív

(4) • $\forall$ $(x, y) \in A$ esetén $x f y$ vagy $y f x$ teljesül rájuk.

Mj.: A tulajdonságokat rendre reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív,

(1) teljes tulajdonságoknak nevezzük.

(2) A rendezési relációt a „$\leq$" szokás jelölni.

Def.: Legyen f egy adott fgv., ha f^{-1} is fgv., akkor azt mondjuk, hogy az f fgv. invertálható. Az f^{-1} fgv-t az f fgv. inverzének nevezzük.

Mj.: $f = \{(1;2)\ (3;2)\ (4;5)\}$ egy első elemhez csakis 1 második tartozik

$f^{-1} = \{(2;1)\ (2;3); (5;4)\}$ nem fgv, mert 1 első elemhez nem 1 második tartozik.

Tétel: Legyen f fgv a-t b-be képező fgv. f invertálható $\Leftrightarrow$, ha bármely $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$

Mj.: $x = y \Leftrightarrow$, ha $f(x) = f(y)$

(ilyenek pl.: a szigorúan monoton fgv-ek.)

pl.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ nem invertálható, mert $f(2) = 4$, $f(-2) = 4$

de: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ invertálható

Biz.: „$\Rightarrow$" Ha invertálható $\Rightarrow x \neq y$, akkor $f(x) \neq f(y)$

indirekt: $\exists$ olyan $x; y \in A$ úgy, hogy $x \neq y$ és $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow$

$(x;z)\in f$ és $(y;z)\in f \Rightarrow (z;x)\in f^{-1}$ és $(z;y)\in f^{-1}$ feltétel $x\neq y$ ↯

ellentmondás ↯

Az invertálhatóságból következik: $x=y$

„$\Leftarrow$"

Tfh, $x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y) \Rightarrow$ invertálható

$(z;x)\in f^{-1}$, $(z;y)\in f^{-1}$

$(x;z)\in f$ és $(y;z)\in f$

$\Downarrow$

$x=y$

$f(x)\neq f(y)$ miatt $x\neq y$, de mivel $z=z \Rightarrow x=y$

$\Downarrow$

f^{-1} fgv. invertálható

II.

Def.: Legyen A egy adott halmaz és $m: A\times A \to A$-ba képező fgv. Ekkor m-et A-beli kétváltozós műveletnek nevezzük.

(a művelet számpárhoz számot rendel $\Rightarrow$ művelet)

Def.: Legyen F egy adott halmaz. Az F halmazt testnek nevezzük, ha értelmezve van benne $m_1: F\times F\to F$ $m_1((x,y)) := x+y$

$m_2: F\times F \to F$ $m_2(\underbrace{(x,y)}_{\text{számpár}}) := xy$ $\to$ a fgv. miatt kétváltozós művelet, amelyekre érvényesek a következők:

- $x+y=y+x$
- $xy = y\cdot x$

} kommutatív tulajdonság $\forall\, x,y,z\in F$

- $(x+y)+z = x+(y+z)$
- $(xy)z = x(yz)$

} asszociativitás $\forall\, x;y,z\in F$

• $(x+y)z = xz + yz$ distributivitás $\forall\, x; y, z \in F$

• $\exists\, 0 \in F$ úgy, hogy $x+0=x$ $\forall\, x \in F$

• $\forall\, x \in F$ $\exists (-x) \in F$ úgy, hogy $x+(-x)=0$

• $\exists\, 1 \in F$, $1 \neq 0$ úgy, hogy $1x = x$ $\forall\, x \in F$

• $\forall\, x \in F$ $x \neq 0$ esetén $\exists x^{-1} \in F$ úgy, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$

Mj.: 0 zéruselem

1 egységelem

$-x$ additív inverz

x^{-1} multiplikatív inverz

Mj.: $a+(-b) =: a-b$ ⇒ a és b különbsége

$a \cdot b^{-1} =: \frac{a}{b}$ ⇒ a és b hányadosa

Mj.: Egy test legalább hány elemű? Min. 2.

Def.: Egy F testet rendezett testnek nevezzük, ha a „$\leq$" rendezési relációra a (1-4) kívül érvényesek a következők:

refl.; antiszim.; tranz.; klajs

(5) • ha $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ $\forall\, x; y, z \in F$

(6) • ha $x \geq 0$ és $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ $\forall\, x; y \in F$

70

Mj.: 1-6 definíciókat rendezési axiómáknak nevezzük.

Def.: Legyen F egy rendezett test. Akkor mondjuk, hogy az $A < F$ halmaz felülről korlátos, ha $\exists$ olyan $K \in F$ szám, úgy hogy $K \geq x$ $\forall\, x \in A$

Mj.: A K-t A felső korlátjának nevezzük.

Def.: Legyen $\mathbb{F}$ egy rendezett test. Akkor mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{F}$ halmaz alulról korlátos, ha $\mathbb{F}$ olyan $k \in \mathbb{F}$ úgy, hogy $k \leq x \quad \forall x \in A$

Mj.: k-t az A halmaz alsó korlátjának nevezzük.

Def.: Legyen $\mathbb{F}$ egy rendezett test, akkor mondjuk, hogy egy $A \subset \mathbb{F}$ halmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

Def.: Legyen $\mathbb{F}$ egy rendezett test. $A \subset \mathbb{F}$ halmaz felülről korlátos $\alpha \in \mathbb{F}$ pontos felső korlátja az A halmaznak, ha érvényes a következő:

(i) α felső korlát

(ii) α minden felső korláttól kisebb vagy egyenlő

Mj.: A pontos felső korlát: sup A („szuprémum" A)

Pontos felső korlát legfeljebb egy van.

Def.: Legyen $\mathbb{F}$ egy rendezett test és $A \subset \mathbb{F}$ halmaz alulról korlátos. $\beta \in \mathbb{F}$ pontos alsó korlátja az A halmaznak, ha:

(i) β alsó korlát

(ii) β minden alsó korláttól nagyobb v. egyenlő

Mj.: Pontos alsó korlát: inf A („infimum" A)

legfeljebb 1 van.

Pl.: $\sup A = 1$ $\qquad A = [0; 1)$ – nem halmazbeli

$\inf A = 0$ $\qquad$ halmazbeli

Def: Legyen F egy rendezett test. $A \subset F$-nek és A felülről nem korlátos. Ekkor a pontos felső korlátját az A-nak úgy jelöljük, hogy $(\sup A =)\ +\infty$

Ha A alulról nem korlátos, akkor $\inf A = -\infty$

Mj.: A $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumok nincsenek benne az F testben.

Tétel: Ha egy F rendezett testben minden felülről korlátos nem üres részhalmaznak van pontos felső korlátja F-ben, akkor F minden alulról korlátos nem üres részhalmazának van pontos alsó korlátja F-ben és fordítva.

Def.: Az F rendezett testet teljes rendezett testnek nevezzük, ha F minden felülről korlátos nem üres részhalmazának van pontos felső korlátja F-ben.

Mj.: Teljességi axióma !!!

Def.: $\mathbb{R}$ teljes rendezett testet a valós számok halmazának nevezzük.

Def.: Az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmazt a term. számok halmazának nevezzük, ha érvényesek a következők:

(i). $1 \in \mathbb{N}$

(ii). ha $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

(iii). ha $A \subset \mathbb{R}$ halmazra érvényesek (i) és (ii) tulajdonságok $\Rightarrow \mathbb{N} \subset A$

$1+1 =: 2$

$2+1 =: 3$

$3+1 =: 4$

Mj.: Teljes indukció axiómája.

Def.: A $\mathbb{Z}$ halmazt az egész számok halmazának nevezzük, ha:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

VII

Def.: A $\mathbb{Q}$ halmazt a racionális számok halmazának nevezzük, ha: $\mathbb{Q} = \{r \mid r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

— o —

II

Tétel: Természetes számok valamely ($\forall$) nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Biz.: teljességi axióma.

Tétel: A természetes számok halmaza felülről nem korlátos.

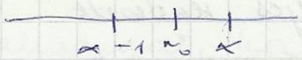
Biz.: Indirekt

Tfh. a term. számok halmaza felülről korlátos.

$\mathbb{N} \neq \emptyset$ $(1 \in \mathbb{N})$ + teljességi axióma $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\alpha = \sup \mathbb{N}$

$(\alpha - 1)$ nem felső korlát.

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad n_0 > \alpha - 1$



$n_0 + 1 > \alpha$

$n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ (term. sz-ra 2. ax.)

ellentmondás $\quad n_0 + 1 > \alpha$ ↯ α nem felső korlát

III

Tétel: Van olyan valós szám, amely nem racionális.

Biz.: $A = \{r \mid r \in \mathbb{R} \quad r^2 < 2\}$

$A \neq \emptyset$ (pl. $r = 1 \in A$)

A halmaz felülről korlátos

$K = 2$ felső kolát + teljességi axióma. $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, ahol

$\alpha = \sup A$

ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor nem igaz $\alpha^2=2$, $\alpha^2>2$, $\alpha^2<2$

(1) $\alpha^2 = 2$ (közvetlenül k.)

Tfh. $\alpha = \frac{p}{q}$ p és q relatív prím $\Longrightarrow [(p,q)=1]$

$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow$ p páros $\Rightarrow$ $p = 2l$ felírható

$4l^2 = 2q^2$

$2l^2 = q^2 \Rightarrow$ q is páros $\lightning$

p és q relatív prímek, nincs közös osztójuk $\lightning$

ha mindkettő páros van közös osztójuk, pl. 2.

(2) $\alpha^2 > 2$

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} > 2 \quad / \cdot n$$

α pontos felső korlát

$\alpha^2 n - 2\alpha > 2n$

$\alpha^2 n - 2n > 2\alpha$

$n(\alpha^2 - 2) > 2\alpha$

$\lightning$ $n > \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2}$ (ilyen n létezik, mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos.)

tőle kisebb felső korlát található

ellentmondás: $\alpha - \frac{1}{n}$

(3) $\alpha^2 < 2$

$$\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n} = \alpha^2 + \frac{2\alpha + 1}{n} < 2$$

így tudunk nagyobbat írni

$n \cdot \alpha^2 + (2\alpha + 1) < 2n$

$2\alpha + 1 < 2n - n\alpha^2$

$2\alpha + 1 < n(2 - \alpha^2)$ → mivel ez a kifejezés pozitív, szabad vele osztani

$\frac{2\alpha + 1}{2 - \alpha^2} < n$ létezik ilyen n, mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos