ellentmondás

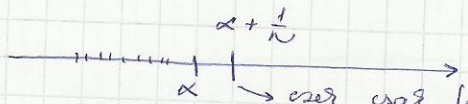
~~[illegible]~~ $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{Q}$ és $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) \in A$

$\downarrow$

azért, mert a $()^2-e < 2$

$\downarrow$

$\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) > \sup \alpha$, de benne van a halmazban.



$\alpha \rightarrow$ ezek csak felső korlátok lehetnek.

$\downarrow$

pontos felső korlát

Ezt akartuk biz. Minden $\mathbb{Q}$ szám $\in \mathbb{R}$, de van olyan szám, ami benne van az $\mathbb{R}$-ben és nem $\mathbb{Q}$

Def.: Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazt az irracionális számok halmazának nevezzük.

Tétel: $\forall\, x;y \in \mathbb{R}$ $x \neq y$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$ szám, hogy $x<r<y$ vagy $y<r<x$ teljesül.

(Bármely két valós szám között van $\mathbb{Q}$ szám)

Biz.: Teljességi axióma

Mj (1): A tétel akkor is érvényes marad, ha $\mathbb{Q}$ helyett $\mathbb{Q}^*$-t mondunk.

(2): A $\mathbb{Q}$ számok és $\mathbb{Q}^*$ számok a számegyenesen sűrűn helyezkednek el.

Intervallumok:

$[a;b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; a \leq x \leq b\}$ zárt interv.

$(a;b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; a < x < b\}$ nyílt interv.

$[a;b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; a \leq x < b\}$

$(a;b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; a < x \leq b\}$

Def.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

abszolútérték függvény

Def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

szignum függvénynek nevezzük.

Def: $f: \mathbb{N} \to A$ - t A-beli sorozatnak nevezzük.
$\mathbb{N}$-t A-ba képező fgv.

$f(n) := a_{(n)}$, akkor a sorozatot $\langle a_n \rangle$-nel jelöljük, és $\{a_n\}$ a sorozat értékkészletét jelöljük.

Mj.: (1) Ha az $A = \mathbb{R}$, akkor valós számsorozatról beszélünk.

(2) $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \Rightarrow$ pl.: így adhatunk meg 1 fgv-t.

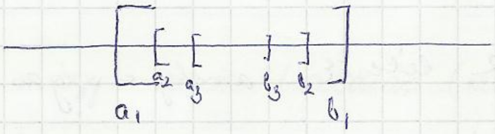
$a_1 = 1$ $\quad a_2 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{11} = \frac{1}{11}$

(3) a_n-t a sorozat n-dik tagjának nevezzük.

Tétel: (Cantor-féle metszet-tétel)

Legyen $a_{n+1} \geq a_n$ és $b_{n+1} \leq b_n$ és $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\alpha = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$



Biz.: feltételből következik: • $a_n \geq a_m$ $\forall n > m$ esetén

$b_s \leq b_k$ $\forall s < k$

- teljes indukcióval biz-ható!

• $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad a_n < b_m$

$$\left(\underline{a_n} \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq \underline{b_m} \right)$$

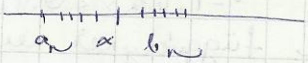
$\Rightarrow \{a_n\}$ felülről korlátos $\Rightarrow$ teljességi axióma miatt

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha = \sup\{a_n\}$

$a_n \leq \alpha$

mivel $a_n < b_m \Rightarrow \alpha \leq b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \leq \alpha \leq b_n$



Def.: Legyen $x \in \mathbb{R}^*$ és $n \in \mathbb{N}$

$x^1 = x$

$x^{n+1} = x \cdot x^n$

Def.: Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Def: Legyen $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\quad x^0 := 1$.

M.: 1, A 0^0 nem definiált

2, A hatványozás azonosságai = a középisk. tanultak teljes indukcióval bizonyítják

Tétel: Legyen $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ és $n \in \mathbb{N}$

Ekkor egyetlen olyan $a \in \mathbb{R}$ létezik, amelyre igaz:

$$a^n = x$$

Biz.: binomiális tétel + teljességi ax.

Def.: Ezt a nem negatív „a" számot az x valós szám n-dik gyökének nevezzük.

Mj.: Ezt $\sqrt[n]{a}$ -val jelöljük

Def.: Ha $x \in \mathbb{R}^-$ és $n \in \mathbb{N}$ páratlan $\Rightarrow$

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

Def.: Legyen $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $q \neq 0$

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Mj.: (1) A törtkitevőre is érvényesek az azonosságok.

(2) $2^{\pi} = \sup\{x \mid x = 2^r, r \in \mathbb{Q}, r < \pi\}$

Halmazok számossága

Topológia

távolságokkal foglalkozó tudományrésze a matematikának

Def.: Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$, x és y távolságán: $d(x;y) = |x-y|$ számot értjük

Tétel: $x;y \in \mathbb{R}$

(1) $d(x;y) \geq 0$, $d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x;y) = d(y;x)$

(3) $d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$ Δ egyenlőtlenség

Biz.: (3).,

$$|x-y| = |x - z + z - y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$$

abszolútérték azonosságai miatt

Def.: Legyen X egy adott halmaz (nem üres halmaz) és $d: X \times X \to \mathbb{R}$, ha d fgv. rendelkezik az (1)(2)(3) tulajdonságokkal, akkor az $(X;d)$ párt metrikus térnek nevezzük, a d fgv-t metrikának.

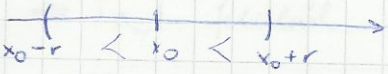
Mj.: $(\mathbb{R};d)$ metrikus tér

$(\mathbb{R}^2;d_1)$ $d_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ számsík

$P_1(x_1;y_1)$ $P_2(x_2;y_2)$

Def.: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor az x_0 r sugarú környezetén értjük: $S_r(x_0) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x_0 - r < x_0 < x_0 + r\}$ halmazt



nyílt környezet, a végpontok nem tartoznak bele.

Tétel: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$.

Ekkor: (1) $x_0 \in S_r(x_0)$ az elem a saját környezetében benne van

(2) $\forall x \in S_r(x_0)$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $S_\varepsilon(x) \subset S_r(x_0)$

környezet — x_0 r sugarú környezete

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \neq y$ esetén $\exists r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $S_r(x) \cap S_r(y) = \emptyset$

nem baj, ha a 2 kör összeér (a távolság fele az r), mert nyílt intervallum így nem számít.

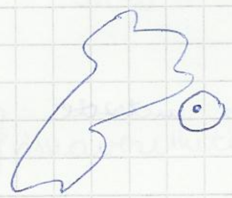
Biz.: TK!

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ belső pontja H-nak, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $S_r(x_0) \subset H$.

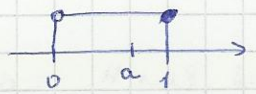
<Van olyan pont, amelynek a környezete részhalmaza a „pocsolyának", akkor az belső pont.>

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ határpontja H-nak, ha x_0 bármely környezetében van H-hoz tartozó és H-hoz nem tartozó elem is.

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ külső pontja H-nak, ha belső pontja $\overline{H}$-nek.



Pl.: $H = (0;1]$



belső p: $H^\circ = (0;1)$

külső p: $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

határpont: $\partial H = \{0;1\}$

Def.: Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha minden pontja belső pont.

pl.: $H = (0;1)$ nyílt halmaz $\Rightarrow$ minden pontja belső pont

Def.: $H \subset \mathbb{R}$ halmazt zártnak nevezzük, ha komplementere nyílt.

pl.: $H = [0;1]$ zárt halmaz

komplementere: $\overline{H} = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

Tétel: ~~Legyen~~ $H \subset \mathbb{R}$

(1) $\mathbb{R}$; $\emptyset$ nyílt is és zárt is

(2) nyílt halmazok uniója nyílt

(3) a véges sok nyílthalmaz metszete nyílt

(4) zárt halmazok metszete zárt

(5) véges sok zárt halmaz uniója zárt

Mj.: $H_n = \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$

végtelenig

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \{0\}$$

$n=1$-től

$\overline{\{0\}} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$\overline{\{0\}} \Rightarrow$ nyílthalmaz

$\Downarrow$

$\{0\}$ zárt végtelen sok nyílt halmaz metszete

nem biztos, hogy nyílt.

$H_n = [1+\frac{1}{n}; 5-\frac{1}{n}]$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = (1;5)$ végtelen sok zárt halmaz uniója nyílt

Biz.)

(1) triviális

(2) H_γ $\gamma \in \Gamma$ nyíltak

nagy γ

$H = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$

$x_0 \in H \Rightarrow \exists\, \gamma_0 \in \Gamma$ úgy, hogy $x_0 \in H_{\gamma_0}$

Mivel a H_{γ_0} halmaz nyílt, létezik olyan R^+ szám, úgy, hogy $S_r(x_0) \subset H_{\gamma_0}$

$\underline{S_r(x_0)} \subset H_{\gamma_0} \subset \underline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma} \Rightarrow$ áll. igaz a halmaz nyílt

(3). $H_1; H_2 \dots H_n$ nyíltak

$H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ (n tag metszete)

$x_0 \in H \Rightarrow x_0 \in H_1;\ x_0 \in H_2 \dots x_0 \in H_n$

Mivel $H_1, H_2 \dots H_n$ halmazok nyíltak, létezik olyan $r_1, r_2 \dots r_n \in R^+$ úgy, hogy $S_{r_1}(x_0) \subset H_1, S_{r_2}(x_0) \subset H_2 \dots S_{r_n}(x_0) \subset H_n$

$r_{min}\{r_1; r_2 \ldots r_n\}$ vesszük a legkisebb sugarat, így ez

$S_r(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ benne van minden halmazban.

(4), (5) visszavezethető de Morgan azonosság segítségével a (2), (3) pontra

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja H-nak, ha x_0 bármilyen környezetében van x_0-tól különböző H-beli elem.

Ha x_0 nem torlódási pont, akkor izolált pontnak nevezzük.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja H-nak $\Leftrightarrow$, ha x_0 $\forall$ környezetében végtelen sok H-beli elem van.

Biz.: triviális (Csak akkor lehet, ha végtelen sok elem van a halmazban. Ha véges sok, a környezetében csak 1 elem lesz, ami nem lehet torlódási pont.)

pl.: $H = (-1; 2] \cup \{5\}$

végtelen sok környezetbeli elem

nem torlódási pont: izolált pont.

torlódási pont $[-1; 2]$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

H zárt $\Leftrightarrow$, ha H torlódási pontjainak halmaza részhalmaza H-nak. (Ha tartalmazza az összes torlódási pontját.)

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, a $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszer nyílt lefedése H-nak, ha G_γ halmazok nyíltak és $H \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

A H halmazt kompaktnak nevezzük, ha bármely nyílt lefedéséből kiválasztható H véges lefedése.

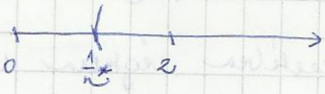
pl.: $H_n = \left(\frac{1}{n}; 2\right)$

$$(0;2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

Tfh. $\left(\frac{1}{n_1};2\right); \left(\frac{1}{n_2};2\right) \dots \left(\frac{1}{n_k};2\right)$

$$(0;2) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n_i};2\right)$$

$n^* = \max\{n_1, n_2 \dots n_k\}$



Az $\frac{1}{n^*+1}$ nincs lefedve

$\Downarrow$

a $(0;2)$ nyílt intervallum nem kompakt.

Tétel: (Heine-Borel)

Ü!

$H \subset \mathbb{R}$ halmaz kompakt $\Leftrightarrow$ H korlátos és zárt.

bizonyítás nem kell

A, B zárt intervallumok kompaktak $(A, B \in \mathbb{R})$

—o—

Eger, 2002. X. 31.

Tétel: (Bolzano – Weierstrass)

A valós számok bármely korlátos végtelen részhalmazának van torlódási pontja a valós számok halmazában. ($\mathbb{R}$-ben)

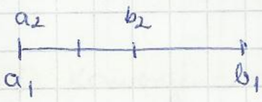
Biz.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ H korlátos és végtelen

ha H korlátos, akkor létezik $a, b \in \mathbb{R}$ (~~úgy, hogy~~) $a < b$

úgy, hogy $H \subset [a, b]$ (zárt intervallum lefedi a H-t)

$a = a_1$ $\qquad$ $b = b_1$

$[a_1; b_1]$-ben végtelen sok H-beli elem van.



$[a_2, b_2]$, amelyben H-nak végtelen sok eleme van

$[a_3, b_3]$, $\qquad$ — " —

$\vdots$

$[a_n, b_n]$, amelyben H-nak végtelen sok eleme van

$$\left.\begin{array}{ll} a_n < b_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ \langle a_n \rangle & \text{monoton növekvő} \\ \langle b_n \rangle & \text{monoton csökkenő} \end{array}\right\} \text{Cantor-féle metszet tétel feltételei} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$$

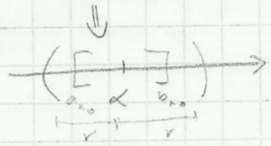
Megmutatjuk, hogy α torlódási pontja H-nak.

$\equiv$(ekvivalens) $\forall r \in \mathbb{R}^+$ $S_r(\alpha)$-ben végtelen sok H-beli elem van.

$$b_{n_0} - a_{n_0} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n} < r \qquad n_0 > \frac{b_1 - a_1}{r}$$

ha $n > \frac{b_1 - a_1}{n} \Rightarrow b_n - a_n < r$

$\Downarrow$



$[a_{k_0}, b_{k_0}]$

$\cancel{[b_{k_0} - a_{k_0}]} < \rho_r(\alpha)$

$\downarrow$

részhalmaza → ő torlódási pont

↳ bizonyítás kész