VII

Valós számsorozatok

$f: N \to A$ A-beli sorozat $\langle a_n \rangle$ $\{a_n\}$

Def.: Az $f: N \to R$ fgv-t. valós számsorozatnak nevezzük

$f(n) = a_n$: a sorozat „n"-dik tagja

$\{a_n\}$: sorozat értékkészlete

Mj.: megadása: $\langle a_n \rangle : N \to R$ $a_n = \frac{2}{n}$ $\sqrt[3]{2}$

rekurzióval való megadás: $R_{n+2} = R_{n+1} + R_n$ $R_0 = 0$ $R_1 = 1$ $g \circ f$

0, 1, 1, 2, 3, 5 → Fibonacci sorozat

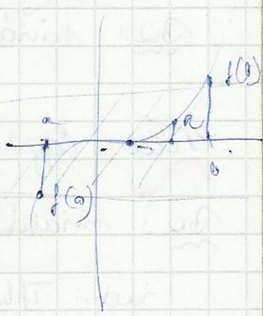
(minden elem a másik kettő összege)

Def.: konvergencia

Legyen $\langle a_n \rangle : N \to R$ valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ konvergens, ha $\exists\, a \in R$ úgy, hogy $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in R$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Mj.: Az „a" számot a sorozat határértékének nevezzük

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ (limesz n tart a végtelenhez a_n)

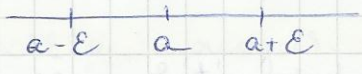


$N(\varepsilon)$: ε-hoz tartozó ~~ks~~ küszöbszámnak nevezzük.

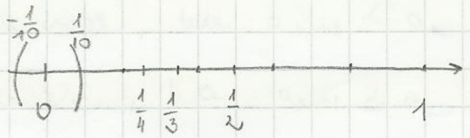
$|a_n - a| < \varepsilon$

$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ /+a

$a - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a$



pl.: $\langle a_n \rangle : N \to R$ $a_n = \frac{1}{n}$



$N\left(\frac{1}{10}\right) = 10;\ 17{,}5;$

$N\left(\frac{1}{100}\right) = \underbrace{100, 132}_{\text{kínos}}, 130\sqrt{2}$

$\frac{1}{100}$ sugarú környezet

$\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$ küszöbszám: $\frac{1}{\varepsilon}$

↑

az $\frac{1}{n}$-nek 0-tól való távolsága $< \varepsilon$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nullsorozat

legfeljebb $N(\varepsilon)$-nyi szám maradhat ki.

Def.: Ha az $\langle a_n \rangle$ nem konvergens, akkor divergensnek mondjuk.

Tétel: Az $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Leftrightarrow$, ha létezik $a \in \mathbb{R}$, úgy, hogy bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Biz.: triviális

Tétel: Egy konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

Biz.: triviális

ind.: Tfh 

$a \neq b$

$r < \frac{b-a}{2}$

ha a a határérték, akkor a környezetén kívül véges sok tag van $\Rightarrow$ S_b is csak végessok lehet, akkor ő nem határérték. ↯

Tétel: Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ korlátos

↳ értékkészlete

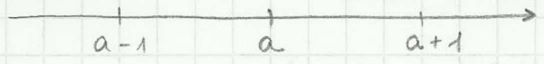
Biz: $\exists\, a \in \mathbb{R}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0$ $\quad \exists\, N(\varepsilon)$ $\quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ $\quad \overset{\varepsilon = 1}{\cancel{\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén}}}$ $\quad \exists\, N(1)$ $\quad n > N(1) \Rightarrow |a_n - a| < 1$

$$-1 < a_n - a < 1$$

$$a - 1 < a_n < a + 1 \qquad n > N(1)$$



kimaradtak $a_1; a_2; \dots a_{[N(1)]}$ → egészrésze

$A = \{a_1, a_2 \dots a_{[N(1)]};\ a-1, a+1\}$

↳ mivel véges sok, van min-a és max-a.

$K = \sup A$ (max) $\qquad k \le a_n \le K \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$k = \inf A$ (min)

$\Rightarrow$ azaz a számsorozat korlátos.

M.: korlátos $\not\Rightarrow$ konvergencia

pl.: $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n = (-1)^n$ $\qquad -3 < (-1)^n < 2$ korlátos

de: nem konvergens

$a_1 = -1; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = -1; \quad a_4 = 1$

Def: Legyen $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy $\langle a_n \rangle$

szigorúan monoton nő $a_n < a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Monoton növekvő: ha $a_n \le a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Szig. mon. csökk., ha $a_{n+1} < a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Mon. csökk., ha $a_{n+1} \le a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

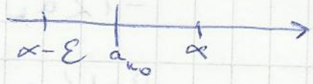
Tétel: ha az $\langle a_n \rangle$ monoton és korlátos $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ konvergens

Biz.: Tfh: $\langle a_n \rangle$ mon. növ. és korlátos

$\{a_n\}$ korlátos $\rightarrow$ teljességi axióma miatt $\Rightarrow$

$\rightarrow$ létezik $\sup\{a_n\} = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\alpha - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ tetszőleges) nem felső korlát



$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} < \alpha$

$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} < a_n$ (ha $n > n_0$) $< \alpha + \varepsilon$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Hasonlóan igazolható monoton csökk. esetben is.

Mj.: $\langle a_n \rangle$ mon. növ. és korlátos $\Rightarrow$ $a = \sup\{a_n\}$

$\langle a_n \rangle$ mon csökk — " — $\Rightarrow$ $a = \inf\{a_n\}$

Def.: Legyen $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat és $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton sorozat. Ekkor a $b_n = a_{f(n)}$, $\langle b_n \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nev.

pl.: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = 2n$

$b_n = a_{2n}$ $\qquad b_1 \quad b_2 \quad b_3$ néhány tagot elhagyunk.

$\qquad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \ \ldots$

$\langle a_n \rangle: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

$\langle b_n \rangle: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

Tétel: Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor bármely részsorozata is konvergens és határértéke is megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Biz.: Triviális

Tétel: (Bolzano - Weierstrass féle kiválasztási tétel)

$\forall$ korlátos ~~szám~~ számsorozatnak van konvergens részsorozata.

Eger

2002. XI. 7.

Tétel (Bolzano - Weierstrass féle kiv. tétel)

Ha az $\langle a_n \rangle$ korlátos $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozata

Biz.: (1) $\{a_n\}$ véges

kiválasztjuk ~~a~~ $a_{f(n)}$ tagokat, amelyre $a_{f(n)} = a$

„a": amelyet a sorozat végtelen sokszor felvesz.

$f(n)$ szig. mon. növ.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_{f(n)} = a$ Van konvergens részsorozata!

(2) $\{a_n\}$ végtelen (különböző értéket felvesz)

$\langle a_n \rangle$ értékkészlete $(\{a_n\})$ korlátos, végtelen $\overset{B-W \text{ tétel}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ létezik torlódási pontja

„a" legyen a torlódási pont

Megmutatjuk, hogy $\exists$ olyan $\langle a_{f(n)} \rangle$ sorozat úgy, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} a_{f(n)} = a$

pl.:

$$a-\frac{1}{n} < a < a+\frac{1}{n}$$

$\mathcal{E}=1$ esetén $\exists\ a_{f(1)}$ úgy, hogy $a-1 < a < a+1$

$\mathcal{E}=\frac{1}{2}$ -"- $\exists\ a_{f(2)} > a_{f(1)}$ úgy, hogy $a-\frac{1}{2} < a < a+\frac{1}{2}$

$\vdots$

$\mathcal{E}=\frac{1}{n}$ esetén $\exists\ a_{f(n)} > a_{f(n-1)}$ úgy, hogy $a-\frac{1}{n} < a < a+\frac{1}{n}$

$$|a_{f(n)}-a| < \frac{1}{n} < \mathcal{E} \qquad \mathcal{E} > 0 \qquad \mathcal{E}=\text{tetszőleges}$$

$$n > \frac{1}{\mathcal{E}} = N(\mathcal{E})$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{f(n)} = a$$

VIII

Tétel: Ha $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ valós számsorozatok $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $\Rightarrow$

(1) $\lim_{n\to\infty} c a_n = ca \qquad c\in\mathbb{R}$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b\neq 0 \quad b_n \neq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N})$

pl.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{6n^2-2n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{6-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{2+0+0}{6+0+0} = \frac{2}{6}$$

$\frac{1}{n}=0$

Biz.: (1). triviális

(2) $\forall\ \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ úgy, hogyha $n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall\ \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ úgy, hogyha $n > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

(3) $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ korlátos

$\Rightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R} \quad |a_n| < K_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$K = \max\{K_1, b\}$

$\langle a_n \rangle$ konvergens

$\forall\ \frac{\varepsilon}{2K} \quad \exists N\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)$ úgy, hogy ha $n > N\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)$

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$

$\langle b_n \rangle$ konvergens

$\forall\ \frac{\varepsilon}{2K} \quad \exists N_2\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)$ úgy, hogy ha $n > \frac{\varepsilon}{2K}$

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges $N = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)\right\}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| =$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b||a_n - a| <$$

$$< K|b_n - b| + K|a_n - a| \overset{n > N(\varepsilon)}{<} K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$\left[\frac{\varepsilon}{2K}\right.$: küszöbszám$\left.\right]$

Hf.:(4)

$\langle a_n \rangle$ konvergens $\langle b_n \rangle$ konvergens

Tétel: Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, továbbá $a_n \le b_n$

$\forall n \in N \Rightarrow a \le b$

Biz: Indirekt

$\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ választással definíció alapján

Tétel: (rendőrtétel)

Ha (az an sorozat határértéke) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

továbbá $a_n \le c_n \le b_n$ $\forall n \in N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Biz: (a_1) $\langle a_n \rangle$ konvergens

$\exists a \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \quad n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - a| < \varepsilon$

(b_1) $\langle b_n \rangle$ konvergens

$\exists b \in R \quad \forall \varepsilon < 0 \quad \exists N_2(\varepsilon) \quad n > N_2(\varepsilon) \quad |b_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ tetszőleges

$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$n > N(\varepsilon)$

$$\underbrace{a - \varepsilon < a_n}_{\text{felh } (a_1)} \le c_n \le \underbrace{b_n < a + \varepsilon}_{\text{felh } (b_1)}$$

$$|c_n - a| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\langle c_n \rangle$ a-hoz konvergál

$\lim_{n\to\infty} c_n = a$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\langle b_n \rangle$ korlátos $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Biz:

$\forall \varepsilon > 0 \quad N(\varepsilon) \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n b_n - 0| < \varepsilon$

(ezt kell bizonyítani)

$\langle b_n \rangle$ korlátos $\exists K$ úgy, hogy $|b_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall \frac{\varepsilon}{K} > 0 \quad \exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$ úgy, hogy ha $n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{K}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K}$

$N(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| <$

$< \frac{\varepsilon}{\cancel{K}} \cdot \cancel{K} = \varepsilon$

IX

Cauchy sorozatok

Def.: Akkor mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat Cauchy sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

Tétel: (Cauchy-féle konvergenciakritérium)

Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\langle a_n \rangle$ Cauchy sorozat.

XI. 14.

Def.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozatot Cauchy-sorozatnak nev., ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Cauchy-féle konvergencia kritérium:

Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Biz.: (1); Tfh. $\langle a_n \rangle$ konvergens, és $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített szám

Ekkor a konvergencia miatt $\exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-vel jelölt küszöbszám, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $n, m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ esetén

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad *$$

Vizsgáljuk $|a_n - a_m|$-et:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + \overset{|a_m - a|}{\overset{\shortparallel}{|a - a_m|}} \underset{\text{m}}{\leq}$$

Δ egyenlőtlenség: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$\underset{\text{m}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (* miatt)

akkor teljesül, ha $n, m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Így minden ⊕ ε-hoz ($\varepsilon > 0$) van olyan $N(\varepsilon)$ /nevezetesen $N(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$/, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ Cauchy-sorozat}$$

(2) : Megfordítva: Tfh $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

Azt kell belátnunk, hogy $\langle a_n \rangle$ konvergens. (Először majd azt látjuk be, hogy $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos. Ekkor a Bolzano–Weierstrass tétel miatt lesz olyan $\langle a_{f(n)} \rangle$-nel jelölt részsorozat, mely konvergens. Ezután azt fogjuk belátni, hogy az $\langle a_{f(n)} \rangle$ határértéke egyben az $\langle a_n \rangle$ határértéke is.)

Mivel $\langle a_n \rangle$ Cauchy sorozat, ezért van olyan $N(1) \in \mathbb{R}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N(1)$ esetén az $|a_n - a_m| < 1$. $**$

Legyen $n_0 > N(1)$ tetszőlegesen rögzített természetes szám.

$$A := \{a_1; a_2 \ldots a_{n_0}; a_{n_0} - 1; a_{n_0} + 1\}$$

Ekkor A-nak legalább 3 eleme van, azaz $A \neq \emptyset$. Másrészt az A számossága véges. $\Rightarrow$ A-nak $\exists$ minimuma és maximuma $\mathbb{R}$-ben: $\exists \min A = \inf A \in \mathbb{R}$

$\exists \max A = \sup A \in \mathbb{R}$

Ha $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n_0 \Rightarrow a_n \in A \Rightarrow \boxed{\min A \leq a_n \leq \max A}$

Ha $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0 \Rightarrow n > N(1) \Rightarrow$ ebből $**$ alapján $\rightarrow |a_n - a_{n_0}| < 1$

$-1 < a_n - a_{n_0} < 1$

$$\underbrace{a_{n_0} - 1}_{\in A} < a_n < \underbrace{a_{n_0} + 1}_{\in A} \Rightarrow \boxed{\min A \leq a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \leq \max A}$$

Így azt kaptuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\min A \leq a_n \leq \max A$.

Tehát $\{a_n\}$ korlátos. $\Rightarrow$ Bolzano–Weierstrass tétel miatt van olyan $\langle a_{f(n)} \rangle$ részsorozata $\langle a_n \rangle$-nek, mely konvergens.

Legyen $a := \lim_{n \to \infty} a_{f(n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-vel jelölt küszöbszám ($\varepsilon > 0$ előre rögzített), hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ esetén

$$|a_{f(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ***$$