$|a_n - a|$ vizsgáljuk meg!

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{f(n)}) + (a_{f(n)} - a)| \underset{\Delta \text{ egyenlőtlenség miatt}}{\leq} |a_n - a_{f(n)}| + |a_{f(n)} - a| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\exists N_2(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}$, $n, m > N_2(\frac{\varepsilon}{2})$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

*** miatt — mert $f(n) \geq n$

Most legyen $n > \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}); N_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$

Így $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}); N_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$ választással kapjuk, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\langle a_n \rangle$ konvergens (és „a" a határértéke)

EDDIG!!!

Pl.:

$$\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a_n := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \frac{1}{n^2}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, $n > m$

$$|a_n - a_m| = \Big|\underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \dots \frac{1}{n^2}}_{a_n} - \Big(1 + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{m^2}\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2} + \dots \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= \Big(\frac{1}{m} - \cancel{\frac{1}{m+1}}\Big) + \Big(\cancel{\frac{1}{m+1}} - \cancel{\frac{1}{m+2}}\Big) + \dots \Big(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ választással, ha $(n>) m > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - a_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Így $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat. $\Rightarrow$ konvergens

Pl.: $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$|a_{2n} - a_n| = \left| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{2n}\right)}_{a_{2n}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Így $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez akárhogyan is választunk egy $N(\frac{1}{2})$ term. számot, mindig van olyan $k, l > N(\frac{1}{2})$, hogy $|a_k - a_l| \geq \frac{1}{2}$. (Nevezetesen $l := N(\frac{1}{2}) + 1$ és $k := 2l$) $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ nem Cauchy-sorozat $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle a_n \rangle$ divergens

$+\infty$-be és $-\infty$-be divergáló sorozatok

Végtelen

Def.: Legyen K egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Ekkor a $+\infty$-nek a K sugarú környezetén a $(K, +\infty)$-ot értjük. Hasonlóan: a $-\infty$-nek a K sugarú környezetén a $(-\infty; K)$-ot értjük.

Def.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $+\infty$-be divergál, ha $+\infty$ bármely környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja található.

Ez a definíció ekvivalens a következő definícióval:

Def.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $+\infty$-be divergál, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, N(K) \in \mathbb{R}$, úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N(K)$ esetén az

$$a_n > K.$$

(Az ekvivalencia megmutatása Hf.!)

Def.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $-\infty$-be divergál, ha a $-\infty$ bármely környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja található.

(ekvivalens a köv Def-val.)

Def.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat, $-\infty$-be divergál, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik $N(K) \in \mathbb{R}$, úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N(K)$ esetén $a_n < K$

Pl.: $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n = n^2$

$a_n > K$

$n^2 > K$

$n > \sqrt{K}$

Azaz, ha $K > 0$, akkor $N(K) = \sqrt{K}$ választással $n > N(K)$ esetén $n^2 > K$ teljesül $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} n^2 = +\infty$

~~Tétel:~~ Ha $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $+\infty$-be divergál $\Rightarrow$ (minden) bármely részsorozata $+\infty$-be divergál. (Hasonló a $-\infty$-re is!!!)

Biz.: ~~$K \in \mathbb{R}$, $\exists N(K) \in \mathbb{R}$, hogy $n > N(K)$ esetén az $a_n > K$~~

~~Legyen $\langle a_{p(n)} \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ egy részsorozata.~~

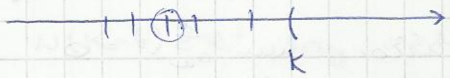
~~Ha $n > N(K) \Rightarrow K < a_n$~~

A környezetes def. alapján triviális!

(Véges szmis. része-a is véges $\Rightarrow$ a nem sorozat továbbra is végtelen!)

Pl.: Előbb láttuk, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (n+1)^2 = +\infty$

Tétel: Ha $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $+\infty$-be divergál, akkor $\{a_n\}$ alulról korlátos, de felülről nem korlátos.



Hasonlóan a $-\infty$-be div. sor.-okra: Ha $\langle a_n \rangle$ valós számsor. $-\infty$-be divergál, akkor $\{a_n\}$ felülről korlátos, de alulról nem korlátos.

A tétel megfordítása nem igaz. Azaz, van olyan sorozat, mely alulról korlátos, felülről nem korlátos, és NEM $+\infty$-be divergál.

Biz.:
$\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n^2, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

$0 < \{a_n\}$, de felülről nem korlátos (n^2 miatt)

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \to 0 \\ a_{2n} = (2n)^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ nem divergál a } +\infty\text{-be} \quad a_n \not\to +\infty$$

Tétel: Ha $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat monoton nő és felülről nem korlátos, $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ $+\infty$-be divergál.

Biz.: HF. (def. szerint)

Tétel: Ha $\langle a_n \rangle$ valós számsor. monoton csökkenő és alulról nem korlátos $\Rightarrow$ $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ $-\infty$-be divergál.

Biz.: Hf (def. szerint)

Tétel: Ha $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re és $|a_n| \xrightarrow{\text{div.}} +\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \xrightarrow{\text{konv.}} 0$
Ha $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re és $|a_n| \xrightarrow{\text{konv.}} 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \xrightarrow{\text{div.}} +\infty$ $\Big\}$ köv. oldalon !!! $\Rightarrow$

Biz.:

2002. XI. 21.

Biz.:

Tétel: 1; Ha az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozatra teljesül, hogy $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

és $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

2, Ha az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozatra teljesül, hogy $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$

Biz.: 1, $\varepsilon > 0$ legyen rögzített

$K := \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists$ olyan $N(K) \in \mathbb{R}^+$, hogy $n > N(K)$ esetén az $|a_n| > K = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$

Ebből következik az állítás!

2, legyen $K \in \mathbb{R}$ adott.

- Ha $K \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Ha $K > 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{K} > 0 \Rightarrow \exists$ olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, hogy (ettől nagyobb)

$n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - 0| < \varepsilon$

$$|a_n| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = K$$

$\Downarrow$

Ebből következik az állítás!

Tétel: 1, Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\langle b_n \rangle$ valós számsorozat alulról korlátos,

akkor $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

2, Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\langle b_n \rangle$ valós számsorozat felülről korlátos,

akkor $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

Biz.: 1, Legyen $K \in \mathbb{R}$ rögzített

$\exists$ olyan $N(K) \in \mathbb{R}^+$, hogy $n > N(K)$ esetén az $a_n > K$.

$\exists$ olyan $b \in \mathbb{R}$, hogy $b_n \geq b$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

$\exists$ olyan $N(K-b) \in \mathbb{R}^+$, hogy $n > N(K-b)$ esetén $a_n > K-b \Rightarrow$

$\Rightarrow K < a_n + b \leq a_n + b_n$

$\Downarrow$

Ebből következik az állítás.

!Hf! 2, (a összes x_n-nél fordítva lesz a relációjel.)

Tétel:

1, Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (vagy $-\infty$) és $\langle b_n \rangle$ olyan valós számsorozat, melyhez $\exists$ $c > 0$, hogy $b_n \geq c$ véges sok n-től eltekintve, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$ (vagy $-\infty$)

2, Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ és $\langle b_n \rangle$ olyan valós számsorozat, melyhez $\exists$ $c < 0$, úgy, hogy $b_n \leq c$ véges sok n-től eltekintve, akkor a $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$ (vagy $+\infty$).

Biz.: 1, Tfh $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Legyen $K \in \mathbb{R}$ rögzített. $\Rightarrow \exists$ $N\left(\frac{K}{c}\right) \in \mathbb{R}^+$, hogy $n > N\left(\frac{K}{c}\right)$ esetén az $a_n > \frac{K}{c}$.

$\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $b_n \geq c$.

$\Downarrow$

Ha $n > \max\{n_0, N\left(\frac{K}{c}\right)\}$, akkor $K < a_n c \leq a_n \cdot b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

Hf. többit biz!

Következmények:

1., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = +\infty$

pl.: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n) = +\infty$

— o —

2., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\langle b_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = +\infty$

pl.: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

— o —

3., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = -\infty$

pl.: $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$ (def. szerint bizonyítható)

$\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$ (— " —)

$\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2-n) = -\infty$

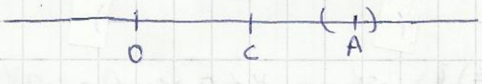
— o —

4., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\langle b_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = -\infty$

pl.: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2+\frac{1}{n}\right) = -\infty$

— o —

5.,



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

pl.: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

— o —

6., $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

pl.: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (n^2+n) = +\infty$

— o —

7., $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = A < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

Pl.: $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(-1+\frac{1}{n}\right) = -\infty$

($-\infty \cdot +\infty = -\infty$

$-\infty \cdot -\infty = +\infty$

$-\infty \cdot c = -\infty$ ha $c>0$

$-\infty \cdot c = +\infty$ ha $c<0$

⋮

stb.)

Példák: $\langle a_n \rangle\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $a_n := (-1)^n \cdot n^2$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-1)^n n^2} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$

— o —

$\langle a_n \rangle\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $a_n := \frac{\sin n}{n}$

$a_n = \frac{\sin n}{n} = \underbrace{\sin n}_{-1 \le\ \le 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{nullsorozat}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{\sin n}\right| = +\infty$

— o —

Nevezetes sorozatok

BERNOULLI - egyenlőtlenség:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

ha $x \geq -1$ és $n \in \mathbb{N}$.

Biz.: (teljes indukcióval)

Tétel: Legyen $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, ahol $a_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$

Ez az ún. MÉRTANI SOROZAT.

1, Az $\langle q^n \rangle$ határértéke $+\infty$, ha $q > 1$

2, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ha $|q| < 1$

3, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, ha $q = 1$

4, A sorozat divergens, ha $q \leq -1$

Biz.: 1, $q > 1 \Rightarrow x := q-1 > 0 \Rightarrow q = 1+x \Rightarrow q^n = (1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ha $n > \frac{K-1}{x}$, ahol $K \in \mathbb{R}$ rögzített, akkor $K < 1+nx < q^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

2, $|q| < 1$

Ha $q = 0 \Rightarrow q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Ha $q \neq 0 \Rightarrow 0 < |q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{q^n}\right| = +\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

3, Triviális

4, Ha $q=-1$, akkor $q^n=(-1)^n \Rightarrow q^{2n}=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{2n}=1$

$$q^{2n-1}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{2n-1}=-1$$

Az $\langle q^n\rangle$ sorozatnak van két olyan részsorozata, mely különböző számokhoz konvergál. $\Rightarrow q^n$ divergens

5, Ha $q<-1 \Rightarrow q^n=(-1)^n(-q)^n$, ahol $-q>1$

$$\lim_{n\to\infty}(-q)^n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^{2n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(-1)^{2n}}_{1}(-q)^{2n}=\lim_{n\to\infty}(-q)^{2n}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} q^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}(-q)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(-(-q)^{2n-1}\right)=-\infty$$

Tehát $\langle q^n\rangle$-nak találtunk két olyan részsorozatát, melyekből az egyik $+\infty$-be, a másik $-\infty$-be divergál $\Rightarrow$ állítás

Tétel:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad , \text{ha } a>0$$

Biz: • Ha $a=1$, akkor triviális ($\Rightarrow \sqrt[n]{1}=1$)

• Ha $a>1$, akkor $\sqrt[n]{a}>1 \Rightarrow b_n := \sqrt[n]{a}-1>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a}=1+b_n$

$$a=(1+b_n)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+nb_n \quad \forall n\in\mathbb{N}\text{-re} \Rightarrow 0<b_n\leq\frac{a-1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}0=0 \Rightarrow$ Rendőrtétel alapján: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

Tétel: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Biz.: $\sqrt[n]{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Binominális tétel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$)

$b_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$

$\Downarrow$

$$n = (1+b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{1} b_n^k \overset{\text{ha } n\geq 2}{\geq} \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} b_n^k = \binom{n}{0} \cdot b_n^0 + \binom{n}{1} \cdot b_n^1 + \binom{n}{2} \cdot b_n^2 =$$

$$= 1 + n + b_n + \frac{n!}{2!(n-2)!} b_n^2 = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2, \text{ ha}$$

$n \geq 2$

$$\frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} \geq b_n^2, \text{ ha } n \geq 2$$

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0 \Rightarrow$ a rendőrtétel alapján a b_n 0-hoz konvergál.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \Rightarrow$ állítás

Tétel: $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens

NEM KELL A BIZONYÍTÁS!!!

Biz.: vázlat:

a, Bizonyítjuk, hogy $\langle a_n \rangle$ szig. mon. nő $(a_n < a_{n+1})$, azaz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \ldots = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-1} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}$ ezt kell bizonyítani

$\geq$ a Bernoulli alapján

$1 + n\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) > \ldots > 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow a_n$ szig. mon. nő.

b, Belátjuk, hogy felülről korlátos

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Erről hasonlóan biz-ható, hogy szig mon csökken.

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re}$$

$$b_1 > b_n = a_n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1} > a_n > a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$$

$$2 < a_n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A sorozat konvergens.

($\langle a_n \rangle$ monoton és korlátos)

Def.: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \ (\approx 2{,}718\ldots)$