XI. 28.

XI

Valós számsorok

Def.: Legyen $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat és $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Ekkor az $\langle s_n \rangle$ valós számsorozatot valós számsornak nevezzük és $\sum_1^\infty a_n$-nel jelöljük.
A s_n tagot az n-dik részletösszegének nevezzük.

Mj.:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Def.: Akkor mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty a_n$ valós számsor konvergens, ha az $\langle s_n \rangle$ valós számsorozat konvergens.
Ha (az $\langle s_n \rangle$ határértéke a valós szám)

$$\lim_{n \to \infty} s_n = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

akkor azt mondjuk, hogy a valós számsor összege a.
jelölése: $\sum_{n=1}^\infty a_n = a$

Mj.:

1) Ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$, akkor azt mondjuk, hogy $\sum_{n=1}^\infty a_n = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$

2) Ha az $\langle s_n \rangle$ divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_n^\infty a_n$ sor divergens.

3) Ha $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ $\sum_0^\infty a_n$, a sor összege $\sum_{n=0}^\infty a_n$

Pl.: $\sum_0^\infty q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens ha $|q|<1 \Rightarrow$

Tétel! sor összege $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$

(geometriai vagy mértani sornak nevezzük)

Biz.: részletösszeg

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } s_n = 1 + q + \dots + q^n \\ &\text{II. } s_n \cdot q = q + q^2 + \dots q^n + q^{n+1} \end{aligned}\right\} \text{II} - \text{I}$$

$$s_n \cdot q - s_n = q^{n+1} - 1$$

$$s_n (q-1) = q^{n+1} - 1 \qquad q \neq 1$$

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{q^{n+1}}^{\to 0\text{-hoz tart}} - 1}{q-1} \overset{|q|<1}{=} \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

$|q|>1 \Rightarrow$ divergens az $\emptyset$ s_n

$q = 1$ $\qquad s_n = (n+1)$ divergens ekkor $+\infty$-hez divergál

Ezt illik tudni!!!

pl.: $\sum_{n=1}^\infty q^n = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} - q$

$$\sum_{n=2}^\infty q^n = \frac{1}{1-q} - 1 - q = \frac{q^2}{1-q}$$

Tétel: (Cauchy-féle konvergencia kritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ valós számsor. $\sum_1^\infty a_n$ számsor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n > m > N(\varepsilon)$

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$$

Biz: $\sum a_n$ konvergens $\Leftrightarrow \langle s_n \rangle$ konvergens $\Leftrightarrow \langle s_n \rangle$ Cauchy-sorozat

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy $n, m > N(\varepsilon)$

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

$n > m$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Tétel: Ha $\sum a_n$ valós számsor konvergens, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ -hoz tart.

Mj.: a sor konvergenciájának szükséges (elengedhetetlen) feltétele

Pl.: $\sum\limits_1^\infty \sqrt[n]{n}$ divergens, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, mert a szükséges feltétel nem teljesül.

$\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ sort harmónikus sornak nevezzük $\Rightarrow$ divergens

$\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ sor konvergens

Biz.: Alkalmazzuk a Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon),\; n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

Válasszuk az n-eket úgy, hogy legyen $n, n-1 > N(\varepsilon)$

$|s_n - s_{n-1}| = |a_n| < \varepsilon \Rightarrow$ áll tehát a_n az 0 sorozat

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

Def.: Ha $\sum_1^\infty |a_n|$ konvergens $\Rightarrow$ azt mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens.

Ha $\sum_1^\infty a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk, hogy $\sum_1^\infty a_n$ sor feltételesen konvergens.

Mj.: a, $\underbrace{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\ ;\ \sum_1^\infty \left|\frac{1}{n^2}\right|}_{\text{abszolút konvergens}}$

b, $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens

$\underbrace{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{feltételesen konvergens}}$ konvergens

Tétel: Ha $\sum_1 a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Biz.: Hf!

XII

Tétel: (Majoráns kritérium)

Legyen $\sum_1 a_n$ adott sor, ha $\exists \sum_1 b_n$ sor úgy, hogy $|a_n| < b_n$ véges sok n kivételével és $\sum_1^\infty b_n$ sor konvergens $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens.

Biz.: Legyen $\langle c_n \rangle$ olyan valós számsorozat, melyre $c_n = b_n$ véges sok n kivételével és a $|c_n| < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

jelöljük $s_n = |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n|$

$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$\sum_1^\infty b_n$ számsor konvergens $\Leftrightarrow \langle S_n \rangle$ konvergens (részlet összegek sorozata) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle S_n \rangle$ korlátos $0 \leq S_n < K$ (← felső korlát) $\forall n \in \mathbb{N}$

$|a_n| < b_n$ véges sok n kivételével

$|c_n| < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \underbrace{|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|}_{s_n} < \underbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_n}_{h_n} < K$$

$\Rightarrow \langle s_n \rangle$ sorozat is korlátos, monoton növekvő $\Rightarrow \langle s_n \rangle$ konvergens

$\langle s_n \rangle$ konvergenciája nem változik, ha véges sok tagot más tagra cseréljük $\Rightarrow s_n' = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

$\langle s_n' \rangle$ konvergens $\Rightarrow \sum_1^\infty |a_n|$ sor konvergens $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ abszolút konvergens $\Rightarrow$ áll.

Tétel: (Minoráns kritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ adott számsor, ha $\exists \sum_1^\infty b_n$ sor, melyre $0 < b_n < a_n$ véges sok n kivételével és $\sum_1^\infty b_n$ sor divergens $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ sor is divergens.

Biz.: triviális, indirekt úton

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ konvergens.

Pl.: $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens és $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens

Tétel: (Cauchy-féle gyökkritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ adott számsor, ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a sor abszolút konvergens

Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow$ a sor divergens.

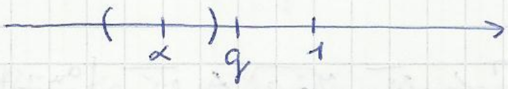
M.: 1) $\overline{\lim}\, H \equiv H$ torlódási pontjainak pontos felső korlátja

$\underline{\lim}\, H \equiv$ — " — alsó korlátja

„limesz szuperior", „limesz inferior"

2) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor a tétel nem tud semmit mondani a sor konvergenciájáról.

Biz.: Tegyük fel, hogy $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < 1$



$\exists\, q \in \mathbb{R}$, amely $\alpha < q < 1$.

$\exists\, N(q)$ $n > N$ akkor a $(\lim \sqrt[n]{|a_n|} < q) \Rightarrow$

küszöbszám

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow |a_n| < q^n$ és $\sum_1^\infty q^n$ konvergens +

+ majoráns kritérium $\Rightarrow$ áll.

divergencia biz: uf!

2002. XII. 5.

a_0

$a_n = a_0 q^{n}$

$\sum_{n=0}^\infty a_n = a_0 \frac{1}{1-q}$ $\quad |q| < 1$

Tétel: D'Alembert-féle hányadoskritérium:

Ha $a_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ és $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ sor abszolult konvergens, ha a $\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum a_n$ sor divergens.

Biz.:

$\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n|$ valamely $N \in \mathbb{N}$-nél nagyobb n-ekre $(n \geq N)$

$\Rightarrow a_n \not\to 0$ (a_n nem tart 0-hoz)

$\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$\exists\, q \in \left(\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, 1\right)$. Erre a q-ra teljesül, hogy elég nagy n-re $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \Leftrightarrow |a_{n+1}| < q|a_n| \Rightarrow |a_{n+k}| < |a_n| \cdot q^k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

(Definiálunk egy új sorozatot:) ha $b_n := \begin{cases} 0, & \text{ha } n < N \\ |a_n| q^{n-N}, & \text{ha } n \geq N \end{cases}$, akkor $|a_n| \leq b_n$ amennyiben $n \geq N$

$\sum b_n$ konvergens $\overset{\text{maj. krit.}}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Mj.:

$$\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \underbrace{\underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\text{Biz: triviális}} \leq \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

a gyökkritérium „erősebb" → elbánik minden sorral, amivel a hányadoskritérium is, de a hányadoskritériummal „könnyebb számolni".

Tétel: Cauchy-féle kondenzációs tétel

Legyen $\langle a_n \rangle$ csökkenő, nemnegatív tagú sorozat.

$\sum_1^{\infty} a_n$ és a $\sum_0^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sor egyszerre konvergensek ill. divergensek.

Biz.: vázlat $s_n = a_1 + \dots + a_n$

$S_n = 2^0 \cdot a_1 + 2 a_2 + \dots 2^n a_{2^n}$ sorozatok egyszerre korlátosak + + monoton növekvőek

következmény:

A $\sum \frac{1}{n^c}$ sor konvergens $\Leftrightarrow$ $c > 1$

példák $c = 1$ harmonikus sor, melyről tudjuk, hogy divergens

$c = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergens

Gyak! Biz be, hogy a négyzetszámok reciproka konvergens!

Biz.:

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^c} = 2^n \cdot 2^{-nc} = \left(2^{1-c}\right)^n$$

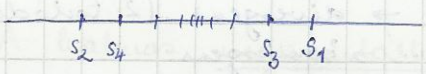
$\sum \left(2^{1-c}\right)^n$ konvergens $\Leftrightarrow$ $2^{1-c} < 1 \Leftrightarrow \boxed{c > 1}$ ✓

Def.: $\sum a_n$ alternáló sor, ha $a_n \neq 0$ és $\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sign} a_{n+1}$ $(\forall n)$ ← $\forall n \in N$

(A sorozat elemei csak az előjelükben váltakoznak.)

Tétel: (Leibniz) Ha $\langle a_n \rangle$ csökkenő nullsorozat ($\to 0$-hoz tart), akkor a $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergens.

Biz.:
$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 - a_2$
$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$



$$s_{2n} \le s_{2n+2} \le s_{2n+1} \le s_{2n-1} \quad (\forall n \in N)$$

Mind a két sorozat külön-külön konvergens (mert korlátos és szig mon nő v. csökk.-ő)

$$s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2} \to 0 \Rightarrow \langle s_n \rangle \text{ Cauchy sorozat.}$$

példa: $a_n = \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$ (feltételesen) konvergens

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2 \ (= \log_e 2)$$

Tétel: Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor $\sum (a_n + b_n)$ és a $\sum c \cdot a_n$ $(c \in R)$ is konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Biz: Triviális

Def.: Ha $f: N \to N$ szig növekvő (term. számokból álló sorozat), akkor a $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{f(1)}$, $b_{n+1} = a_{f(n)+1} + a_{f(n)+2} + \dots + a_{f(n+1)}$ sorozatból képzett $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ sor egy csoportosított sorának nevezzük.

$$\overbrace{(a_1 + a_2)}^{b_1} + \overbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}^{b_2} + \overbrace{(a_6 + a_7 + a_8)}^{b_3} + \dots$$

$f(1) = 2$ $\quad f(2) = 5$ $\quad f(3) = 8$

Tétel:
Konvergens sor bármely csoportosított sora is konvergens, az összegük egyenlő.

példa: $a_n = (-1)^n$

$f(n) = 2n$

divergens sor csoportosított sora lehet konvergens.

$(1-1)+(1-1)+(1-1)\ldots \Rightarrow$ divergens (2 torlódási pontja van)

$0 + 0 + 0 + \ldots \Rightarrow$ konvergens

Def.: Ha $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció (kölcsönösen egyértelmű) és $b_n = a_{f(n)} \Rightarrow$ a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ sor egy átrendezett sorának nevezzük.

Tétel: Abszolult konvergens sor bármely átrendezett sora is (abszolult) konvergens, és összegük egyenlő.

Feltételesen konvergens sor (~~esetében~~ $\exists$) és tetszőleges $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\to$ bővített valós: $-\infty$, $+\infty$) esetén $\exists$ olyan átrendezett sor, amelynek összege épp „a".

Számosság IV

2002. XII. 12.

Def.: Legyenek A és B adott halmazok. Akkor mondjuk, hogy A és B azonos számosságú (ekvivalens), ha $\exists$ olyan $f: A \to B$ fgv., amely invertálható és $R_f = B$.

Pl.: Melyik számok vannak többen? ($\mathbb{N}$ vagy négyzetszámok)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = n^2$ $\to$ {négyzetszámok halmaza} azonos számosságú

$1 \to 1$
$2 \to 4$
$3 \to 9$
$\vdots$

Def.: Akkor mondjuk, hogy az A halmaz véges, ha $A=\emptyset$ vagy $\exists$ olyan $n\in\mathbb{N}$, úgy, hogy A és az $\{1,2,\dots n\}$ halmaz ekvivalens.

Def.: Ha az A halmaz nem véges, akkor végtelennek mondjuk.

Def.: Az A halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezzük, ha ekvivalens a $\mathbb{N}$ számok halmazával.

Def.: Akkor mondjuk, hogy az A halmaz megszámlálható, ha A véges, vagy megszámlálhatóan végtelen

Tétel: Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer. Ha $f\subset \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ olyan reláció, melyre $A f B \Leftrightarrow A$ ekvivalens B-vel $\Rightarrow f$ ekvivalenciareláció $\mathcal{A}$-n.

Mj.:

$$\left.\begin{array}{l}\langle a_n\rangle : \mathbb{N}\to A \text{ és } a_n\neq a_m, \text{ ha } n\neq m\\ \{a_n\}=A\end{array}\right\} \equiv \text{megszámlálhatóan végtelen}$$

Tétel: Ha A halmaz végtelen, akkor van megszámlálható végtelen részhalmaza.

Biz.: NEM KELL!

Tétel: Az A halmaz végtelen $\Leftrightarrow$ ha A-nak van vele megegyező számosságú valódi részhalmaza.

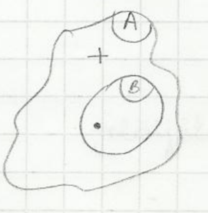
Biz.: Ha A végtelen $\Rightarrow \exists\, B\subset A$ valódi részhalmaz úgy, hogy B megszámlálhatóan végtelen.

$\langle x_n\rangle:\mathbb{N}\to B$ úgy, hogy $n\neq m$, $x_n\neq x_m$, $\{x_n\}=B$

$f: A\to A\setminus\{x_1\}$

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\in A\setminus B\\ x_{n+1}, & \text{ha } x\in B \quad x_n=x\end{cases}$$

→ soha nem veszi fel az x_1 értéket!



invertálható $\overleftarrow{x \text{ csekk } A\ B}$ önmagát ; x_n csekk $\to x_{n+1}$

f invertálható

értelmezett az $A \setminus \{x_1\}$

A és $A \setminus \{x_1\}$ azonos számosságú

Tétel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen

Biz.: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$n = 2^{k-1}(2m-1)$

$n \to (k, m)$ Minden n számhoz hozzá lehet rakni (k, m) párt.

Tétel: Legyen A halmaz megszámlálhatóan végtelen. Ekkor $\exists f$ fgv, ahol $f: \mathbb{N} \to A$

Tétel: Legyen $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ egy halmazrendszer. Ha Γ megszámlálhatóan végtelen, és A_γ halmazok megszámlálhatóan végtelenek $\Rightarrow$ $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ halmaz megszámlálhatóan végtelen.

nagy γ

Tétel: A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen

Biz.:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A_n = \left\{ \frac{p}{n} \mid p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

n rögzített A_n számossága $\overset{\text{megegyezik}}{=} \mathbb{Z}$ számossága $\equiv \mathbb{Z} = \underbrace{\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\}}_{\text{megszámlálhatóan végtelen}}$

$$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \xRightarrow{\text{előző tétel}}$$

Q megszámlálhatóan végtelen

Def: Akkor mondjuk, hogy A számossága nagyobb v. egyenlő B számosságával, ha B számossága megegyezik A egy valódi részhalmazának a számosságával

Def: Akkor mondjuk, hogy A számossága nagyobb, mint a B számossága, ha B számossága megegyezik A egy valódi részhalmazának számosságával, és A és B nem ekvivalensek.

Tétel: A valós számok halmazának számossága nem megszámlálhatóan végtelen.

Mj: $[0, 1]$ számossága nem megszámlálhatóan végtelen
(Ezt a számosságot KONTINUUM SZÁMOSSÁGNAK nevezzük.)

2002. XII. 19.

Tétel: A $[0; 1]$ számossága nagyobb, mint a természetes számok számossága.

Biz:

Legyen $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$A \subset [0; 1] \Rightarrow [0; 1]$ számossága nagyobb v. egyenlő a term. számok számosságánál.

Azt szeretnénk bizonyítani, hogy $\neq$.

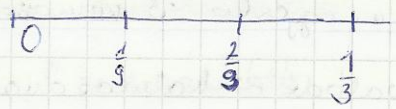
Indirekt: Tfh. $\mathbb{N}$ és $[0; 1]$ számossága megegyezik

$\exists\ f: \mathbb{N} \to [0; 1]$ függvény, úgy, hogy $R_f = [0; 1]$

$[0; \frac{1}{3}]$ $[\frac{2}{3}; 1]$

Válasszuk azt, amelyikben nincs benne $f(1)$

jelöljük ezt $[a_1; b_1]$



$[0; \frac{1}{9}]$ $[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}]$. Válasszuk azt, amelyikben nincs benne $f(2)$

jelöljük ezt $[a_2, b_2]$

⋮

ha $[a_n, b_n]$ adott

$$\left[a_n; a_n + \frac{b_n - a_n}{3}\right] \text{ ill. } \left[b_n - \frac{b_n - a_n}{3}; b_n\right]$$ válasszuk, amelyben $f(n)$ nincs benne

jelöljük $[a_{n+1}; b_{n+1}]$

$[a_n; b_n]$ intervallumok kielégítik a Cantor-féle metszet tétel feltételeit. $\Rightarrow \exists\, \alpha \in [0; 1]$ úgy, hogy $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$ (metszet)

$\alpha \neq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ellentmondás ↯ <azt mondtuk, hogy van olyan fgv, amely az f-et a $[0; 1]$-be képezi, de α nem lesz soha kép!>

$f: \mathbb{N} \to [0; 1] \quad R_f = [0; 1]$

$\Downarrow$

állítás, tehát NAGYOBB

Def: A $[0; 1]$ zárt intervallum és a vele ekvivalens halmazok számosságát kontinuum számosságnak nevezzük.

Mj: Megmutatható, hogy a valós számok halmaza kontinuum számosságú. (TK)