III. 6.

1. óra

Lineáris terek (vektorterek)

Def.: Legyen L adott halmaz, T test. Az L halmazt a T test feletti vektortérnek (lineáris térnek) nevezzük, ha értelmezve van „benne" két művelet, az $m_1 : L \times L \to L$ összeadás $(x+y := m_1((x,y)))$ és az $m_2 : T \times L \to L$ skalárral való szorzás $(\lambda x := m_2((\lambda, x)))$ a következő tulajdonságokkal:

1–4. L az összeadásra nézve Ábel-csoport.
(komm., asszoc., ∃ zéruselem ; additív inverz)

5. $1x = x \quad \forall x \in L$

6. $(\lambda \mu) x = \lambda(\mu x) \quad \forall \lambda, \mu \in T, \ \forall x \in L$

7. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x \quad \forall \lambda, \mu \in T, \ \forall x \in L$

8. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in L, \ \forall \lambda \in T$

(F) $0x = \Theta \quad$ (0 a T, Θ az L zéruseleme)

Def.: $x - y := x + (-y) \quad (x, y \in L)$

(F) Altér, generátorrendszer, bázis, dimenzió, lineáris függőség, függetlenség, lin. kombináció

Példák:

1) $\mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{R}$ felett

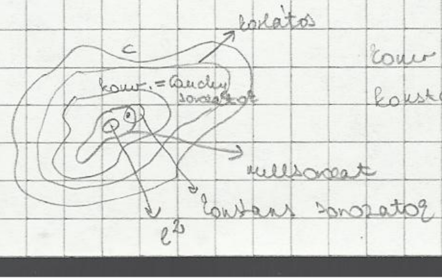
2) $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ felett

3) $c := \{ \langle a_n \rangle : \langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$ $\quad \mathbb{R}$ felett

végtelen dimenziós vektortér

k. sorozat : minden elem 0, a k. elem 1. ⇒ ezek lin. függetlenek.

alterek:



konv + konv = konv.
konstans · konv = konv.

$\mathbb{Q}$ felett a konvergens sorozatok nem esnek egybe a Cauchy-sorozatokkal. (max. részhalmaza)

A divergens sorozat nem altér.

Korlátos sorozat $\Rightarrow$ altér

Nullsorozat $\Rightarrow$ altér

Monoton sorozatok $\Rightarrow$ nem alkot alteret.

nőv. konveva negatívval $\Rightarrow$ csökk.

Triviális altér: egész tér, zérusvektorból álló 1 elemű halmaz

4.) $l^2 := \{ \langle a_n \rangle : \langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \}$ a_n^2 konvergens

$\Downarrow$

a_n nullsorozat

a_n^2-nek 0-hoz kell konvergálni, így a_n-nek is.

$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ Furier-sorból !!

$\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ nullsorozat, de nincs benne l^2-ben.

$\lambda \in \mathbb{R}, \ \langle a_n \rangle \in l^2 \Rightarrow \lambda \langle a_n \rangle := \langle \lambda a_n \rangle \in l^2$

$$\sum_1^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_1^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_1^{\infty} a_n b_n + \sum_1^{\infty} b_n^2$$

$\Downarrow$

feladatgyűjt-ben (X. fej.) benne van.

$|a_n b_n| = \sqrt{a_n^2 b_n^2} \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$

$\Downarrow$

$\sum a_n b_n$ abszolút konv. $\Rightarrow$ konvergens.

$\sum a_n b_n$ és $\sum a_n^2$ $\Rightarrow$ belső szorzat def-ra való, csak most nem véges sok, hanem megszámlálhatóan végtelen sok tagja van.

koordináták négyzetösszege $\Rightarrow$ hossza

5) $C([a,b])$ $\left(= C_0([a,b])\right) := \{f : f:[a,b]\to\mathbb{R} \;\; f \text{ folytonos}\}$

$([a,b] \subset \mathbb{R})$

$C_n([a,b]) := \{f : f:[a,b]\to\mathbb{R}, \; f \; n\text{-szer folytonosan differenciálható}\}$

$(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

összeadásra nézve Abel-csop-t alkot, $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak.

lin. függetlenek: „$1, x, x^2, \dots$" fgv.

A továbbiakban mindig a valós számok feletti vektortereket vizsgáljuk.

Lineáris normált terek:

mátrix → vektortér

Def.: Legyen L lineáris tér és $f: L \to \mathbb{R}$ olyan fgv., hogy

az $\|x\| := f(x)$ jelöléssel:

(1) $\|x\| \geq$ $\forall x \in L$, és ha $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \Theta$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ $\forall x, y \in L$ és $\lambda \in \mathbb{R}$,

az $\|$-ket kell a kidésés.

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in L$ (Minkowski-egyenlőtlenség)

Ekkor az (L, f) párt lineáris normált térnek nevezzük.

f-et normálnak.

$\|x\|$: x elem normája

(T) Ha L lin. normált tér $\Rightarrow \|\Theta\| = 0$.

Tétel: Ha L lin. normált tér és $d: L\times L \to L$ $\;d(x,y) := \|x-y\| \Rightarrow$

(L, d) metrikus tér.

Biz.: (T)

A norma a valós szám abszolútértéke.

Példák: 1) $\mathbb{R}^n$; $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\left(x_i := (x_1, \dots x_n)\right)$

2) ℓ^2 ; $x \in \ell^2$, $x := \langle x_n \rangle$, úgy $\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ — nem végt., mivel konvergens.

3) $C([a,b])$, $f \in C([a,b])$, $\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$, *

$$\|f\|_2 := \int_a^b |f|$$

$$\|f\|_3 := \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$$

* („sup-norma" korlátos fgv-ek vektorterében)

(F) Ábrát csinálni. Zárt intervallumon értelmezett valós értékű fgv-ek halmazát ért. és gyártunk altereket

III. 13. **2. óra**

$f \in C([a,b])$ $\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

Fgy. V. fejezetben van ilyen feladat

két esetet vizsgálunk : $\lambda = 0$ → igaz, nem kell vizsgálni

$\lambda \neq 0$ → csak a pozitív számokra kell vizsgálni

Bizonyítandó ($H \subset \mathbb{R}$, $x \geq 0$ $\forall x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$G := \{\lambda x : x \in H\} \Rightarrow \sup G = \lambda \sup H$)

$\alpha := \sup H$ $x \leq \alpha$ $\forall x \in H$ esetén $\Rightarrow$ mivel $\lambda > 0$, $\lambda x \leq \lambda\alpha$

$\forall x$-re $\Rightarrow$ $\lambda\alpha$ felső korlátja G-nek

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. $\alpha = \sup H \Rightarrow \exists x_0 \in H$, hogy $x_0 > \alpha - \frac{\varepsilon}{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda x_0 > \lambda\alpha - \varepsilon$, $\lambda x_0 \in G \Rightarrow \sup G = \lambda\alpha$

ő a pontos felső korlát

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b]) \Rightarrow \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$

$$f, g \in C([a,b]) \Rightarrow |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \overset{\text{norma def. miatt}}{\leq} \underbrace{\|f\|_1 + \|g\|_1}_{\text{valós szám}} \quad \forall x\text{-re}$$

A valós szám pontos felső korlátja $(f+g)(x)$-nek.

$$\Rightarrow \|f+g\|_1 := \sup\{|(f+g)(x)| : x \in [a,b]\} \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$f, g \in C([a,b]) \qquad \|f\|_2 = \int_a^b |f|.$

Ha egy fgv Riemann integrálható $\Rightarrow$ a fgv abszértéke is integrálható.

($\| \; \|_2$ nem norma $R([a,b])$-ben.)

$f, g \in C([a,b]) \qquad \|f\|_3 := \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$

f^2 nem negatív fgv

Minkowski-egyenlőtlenség bizonyítása: $\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2} \iff$

$$\int_a^b (f+g)^2 \leq \int_a^b f^2 + 2\sqrt{\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)} + \int_a^b g^2 \iff \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{skaláris szorzat} \\ \text{absz értéke}}}{\int_a^b fg} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{két elem} \\ \text{normájának a szorzata}}}{\sqrt{\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)}}}_{\text{Schwarz-egyenlőtlenség}}$$

integrálás + tul.

Banach-terek

- teljes metrikus tér: azon a tere, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens.
  Ha a R-ből kivesszük a 0-t, az $\frac{1}{n}$ ebben a halmazban Cauchy-sorozat, de nem konvergens. (Csak egy kié lehet!)
- Diszkrét metrikus térben a konstans sorozatok a konvergensek.

Def.: Az L lineáris normált tér Banach-tér, ha a normából származó metrikával teljes metrikus tér.

Példák: Banach-terekre.

1) $\mathbb{R}$; $\|x\| := |x|$. mivel érvényes a Cauchy-krit $\Rightarrow$ Banach-tér

2) $\mathbb{R}^n$; $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\Rightarrow$ Banach-tér

3) $C([a,b])$ $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ $\Rightarrow$ Banach-tér

Bizonyítani kell: ebben a térben minden Cauchy-sorozat konvergens.

Állítjuk: $\langle f_n \rangle : \mathbb{N} \to C([a,b])$ Cauchy-sorozat $\Rightarrow \langle f_n \rangle$ konvergens.

(Biz.: $\langle f_n \rangle$ fgv-sorozat egyenletesen konvergens.)

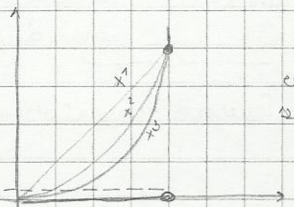
$\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat $\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$-hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$d(f_n, f_m) < \varepsilon$.

$d(f_n, f_m) := \|f_n - f_m\| = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a,b]\}$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges.

Ha $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)|$



ez a fgv-sorozat nem egyenletesen folytonos, szakadása van az $[1;1]$ helyen.

$x^n < \varepsilon$ $(1 > x > 0,\ 0 < \varepsilon < 1) \Leftrightarrow n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log x}$.

$\log x < 0 \Rightarrow$ megváltozott az egyenlőtlenség iránya.

egyenletes konv.:

$(\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál f-hez $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = 0)$

$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \langle f_n(x) \rangle$ Cauchy-sorozat $\forall x$-re

$\Rightarrow \forall x$-re $\langle f_n(x) \rangle$ konvergens.

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

A pontonkénti konvergencia megvan $\to$ be kell látni, h a fgv benne van a $C([a,b])$ térben $\to$ azaz biz be az egyenletes konvergenciát

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists\, N(\varepsilon/2) \in \mathbb{R} : n, m > N(\varepsilon/2) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [a,b]$

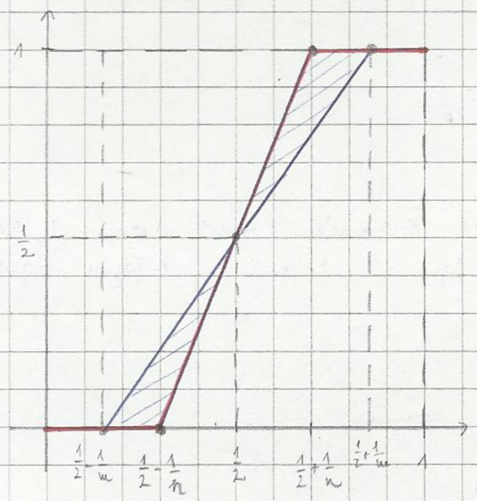
Legyen $n > N(\varepsilon/2)$ rögzített $m \to \infty$ határátmenettel: $|f_n(x) - f(x)| \leq \underset{<\varepsilon}{\varepsilon/2} \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál f-hez $\Rightarrow$ f folytonos, azaz $f \in C([a,b]) \Rightarrow$

$\langle f_n \rangle$ konvergens $(C([a,b]), d)$-ben.

4) $f \in C([a,b])$, $\|f\| := \int_a^b |f|$.

Ekkor $C([a,b])$ az ebből a normából származó metrikára nézve nem teljes metrikus tér.



$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_1(x) := f_2(x) := 0$

$m = \frac{n}{2}$

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \qquad n \geq 3$$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 3$

Az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ponton minden fgv-gráf átmegy a szimmetria miatt.

Legyen $f := \lim f_n$. Ekkor $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ha } x < 1/2 \\ 1/2, \text{ha } x = 1/2 \\ 1, \text{ha } x > 1/2 \end{cases}$$

$f \notin C([0,1])$ $\frac{1}{2}$ pontban nem folytonos.

$\langle f_n \rangle$ nem konvergens $C([0,1])$-ben.

Be kell látni h. a fgv-sorozat Cauchy-sorozat.

Állítás: $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ $n > m \geq 3$ $\quad d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \frac{1}{2} \frac{n-m}{nm} \leq$

$\leq \frac{1}{2m} \to 0$-hoz konv $\Rightarrow$ Cauchy-sorozat.

Áll. igaz!

$[0,1] = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}] \cup [\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1]$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{nm}$$

III.20. **3. óra**

elmaradt.

III. 27. 4. óra

5) ℓ^2 Banach-tér

↳ valós számsorozatok bizonyos halmaza, a norma ennek a $\sqrt{\ }$-e.

Euklidészi terek

Def.: Legyen L lineáris tér (valós). Az L-et Euklidészi térnek nevezzük, ha értelmezve van benne egy $f: L \times L \to \mathbb{R}$ fgv a következő tulajdonságokkal:

(az $(x,y) := f((x,y))$ jelöléssel)

1. $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in L$ kommm.
2. $(\lambda x, y) = \lambda (x,y) \quad \forall x,y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x+y, z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall x,y,z \in L$
4. $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in L$, és $(x,x) = 0 \Rightarrow x = \Theta$

↳ x a vektortér zérusvektora

(x,y)-t az x és az y vektor belső vagy skaláris szorzatának nevezzük.

(F) $(\Theta, \Theta) = 0$. 2.-ből következik

Tétel: (Schwarz-egyenlőtlenség)

Ha L Euklidészi-tér és $\|x\| := \sqrt{(x,x)} \quad (\forall x \in L) \Rightarrow |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

Biz.: Ha $x = \Theta$ v. $y = \Theta \Rightarrow$ igaz

Legyen $x \neq \Theta$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (tx+y, tx+y)$.

$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ezek skaláris szorzatok

$f(t) = (tx, tx) + (tx, y) + (y, tx) + (y,y) = \|x\|^2 \cdot t^2 + 2t(x,y) + \|y\|^2 \geq 0 \quad \forall t$-re

$4(x,y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$ diszkrimináns

$\Downarrow$ átrendezés, majd gyökvonás után

$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

Tétel: Ha L euklideszi tér és $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ $(\forall x \in L) \Rightarrow (L, \|\ \|)$

lineáris normált tér.

Biz.: $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda|\ \|x\|$.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \overset{\text{Schwarz-e.}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\int$

Példák:

1. Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x := (x_1, \dots x_n)$ $y := (y_1, \dots y_n)$ és

$(x,y) := xy := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad (f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow$

$(\mathbb{R}^n, f)$ euklideszi tér.

2. ℓ^2, $x, y \in \ell^2$

$x := \langle x_n \rangle$, $y := \langle y_n \rangle$ $\quad f: \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

$\Rightarrow (\ell^2, f)$ euklideszi tér

3. $f, g \in C([a,b])$, $f: C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$,

$f(f,g) := \int_a^b fg \Rightarrow (C([a,b]), f)$ euklideszi tér

Hilbert-terek

Def.: A H halmazt Hilbert-térnek nevezzük, ha H euklideszi tér és Banach-tér.

$(\|x\| := \sqrt{(x,x)},\ d(x,y) := \|x-y\|)$.

↳ két vektor különbségéből származtatjuk a távolságot

Példák:

1. $\mathbb{R}^n, \ell^2$ Hilbert-tér

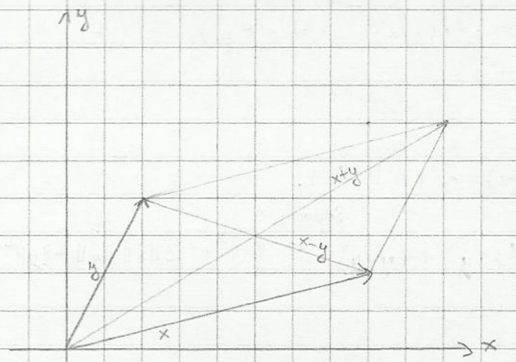
2. $C([a,b])$ nem Hilbert-tér, ha $\|f\|^2 := \int_a^b f^2$ (nem Banach-tér)

Tétel: (Neumann János) Normanégyzet-egyenlet

A H Banach-tér $\Leftrightarrow$ Hilbert-tér, ha

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\ x, y \in H$$

F: Biz $\rightarrow$ Paralelogramma



Biz.:

$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y,\, x+y) + (x-y)(x-y) = 2(x,x) + 2(y,y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Ez az irány trivialitás!

All.:

$C([0;1])$ nem Hilbert-tér, ha $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

Legyen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, $g(x) := 1$. (Ezek folytonos fgv-ek $\Rightarrow$ $f, g \in C([0,1])$)

$\|f\|^2 = \|g\|^2 = 1$

$\|f+g\| = \sup\{|1+x| : x \in [0,1]\} = 2$

$\|f-g\| = \sup\{|x-1| : x \in [0,1]\} = 1$

Nem teljesül a normanégyzet-egyenlet $\Rightarrow$ nem Hilbert-tér. $(5 \neq 4)$

All.:

$C([0, \frac{\pi}{2}])$ nem Hilbert-tér, ha $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

$f, g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$, $g(x) := \cos x$ $(f, g \in C([0, \frac{\pi}{2}]))$

$\|f\|^2 = \|g\|^2 = 1$

A derivált ott 0, ahol a $\sin x = \cos x$ $x = \frac{\pi}{4}$, értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de meg kell nézni 0 és $\frac{\pi}{2}$ helyeken is.

(F) $\|\sin x - \cos x\| = ?$

$\|\sin x + \cos x\|^2 = 2$

04.24. Fgj. az analízisből

Szőkefalvi Nagy Béla: Valós fgv-ek és fgv-sorok.

máj 2.
máj 8, 9.
máj 18.
máj 22.

Def.: Az (X, d) metrikus tér szeparábilis, ha $\exists\ H \subset X$ megszámlálható halmaz, amelynek lezártja X.

halmaz lezártja: hozzávesszük a torlódási pontot is.

Az összes zárt halmaz metszete zárt.

Def.: A H Hilbert tér szeparábilis, ha, mint metrikus tér szeparábilis.

Pl.: 1) $\mathbb{R}^2$ véges dimenziós szeparábilis Hilbert tér.

2) ℓ^2 végtelen dimenziós —"—

$H_n := \{\langle x_k\rangle : \langle x_k\rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ x_k := 0, \text{ ha } k > n\}$ $(n = 1, 2 \ldots)$

H_n megszámlálhatóan végtelen $\Rightarrow H := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ megszámlálhatóan végtelen.

„kis l 2"

$\overline{H} = \ell^2$ (H lezártja $= \ell^2$)

Schwarz-egyenlőtlenség

$x, y \in H$ (ahol H Hilbert tér), $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta \Rightarrow \dfrac{|(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ egy és csak egy $\varphi \in [0, \pi]$: $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$

Def.: Legyen H Hilbert tér. x és y szöge: $\varphi := \arccos \dfrac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$, ha $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta$.

Ha $x := \Theta \Rightarrow$ a Hilbert tér $\forall$ elemével bezárt szöge $\frac{\pi}{2}$.

merőleges x és y skaláris szorzata 0.

x és y ortogonális, ha $(x, y) = 0$.

Def.: Legyen H Hilbert tér. $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortogonális rendszer H-ban,

skaláris szorzat   egy nem zérusvektor

ha $(e_\gamma, e_\sigma) = 0$ $\forall\ \gamma, \sigma \in \Gamma$, $\gamma \neq \sigma$ esetén, $e_\gamma \neq \Theta$ $\forall\ \gamma \in \Gamma$ esetén.

$\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortonormált rendszer, ha $(e_\gamma, e_\sigma) = \begin{cases} 1, \text{ ha } \gamma = \sigma \\ 0, \text{ ha } \gamma \neq \sigma \end{cases}$

($\|e_\gamma\| = 1$ $\forall\ \gamma \in \Gamma$) a normálás azt jelenti, hogy egységnyi hosszúsággal

Mj.: 1) Ha $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortogonális rendszer $\Rightarrow \left\{\frac{e_\gamma}{\|e_\gamma\|} : \gamma \in \Gamma\right\}$ ortonormált rendszer.
$\rightarrow$ elosztjuk a hosszával, így egységvektort kapunk.

2) Ha $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortogonális rendszer $\Rightarrow$ lineárisan független.

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \Theta$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\right) = (\Theta, e_j) = 0 \qquad j \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \lambda_j = 0.$$

[mivel ez ortogonális rendszer $\Rightarrow$ 0-t kapunk]

Def.: Az $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortogonális (v. ortonormált) rendszer teljes, ha az $(x, e_\gamma) = 0$ $\forall \gamma \in \Gamma$ feltételből $x = \Theta$ következik.

F: $x \in \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisának minden vektorára merőleges $\Rightarrow$ a vektor 0.

A H Hilbert tér teljes ortonormált rendszerét a térbázisának nevezzük.

$\mathbb{R}^n$: ortonormált bázis

ℓ^2: (természetes általánosítása $\mathbb{R}^n$-nek végtelen eleme van. egy elem 1, a többi 0, stb.)

T.: Szeparábilis Hilbert térnek $\exists$ bázisa, és minden H-beli bázis megszámlálható.

Def.: Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér és $x \in H$.
Ha $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ H bázisa $\Rightarrow$ a $c_n := (x, e_n)$ számokat az x $\{e_n\}$-re vonatkozó általánosított Fourier-együtthatóinak nevezzük.
$\Downarrow$
koordináták általánosítása

Az x általánosított Fourier-sora: $\sum_{1}^{\infty} c_n \cdot e_n$

T.: (Bessel-f. egyenlőtlenség) H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bázis H-ban, $x \in H$, $c_n := (x, e_n)$ $(n = 1 \dots \infty)$ $\Rightarrow$
$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

$s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \quad \wedge \quad 0 \le \|x - s_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad s_n \le \|x\|^2$

H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bázis H-ban.

ált. Fourier-együttható.

$\{e_n\}$ zárt, ha $\forall$ $x \in H$ esetén $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, ahol $c_n := (x, e_n)$

(Parseval-egyenlőség) Pit. tétel általánosítása

T.: Végtelen dim. szeparábilis Hilbert-térben egy ortonormált rendszer teljes $\Leftrightarrow$, ha zárt.

T.: (Riesz – Fischer)

Legyen H végtelen dim. szeparábilis Hilbert-tér, $\langle c_n \rangle \in \ell^2$ ($\sum c_n^2$ sor konvergens) és $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormált rendszer H-ban. Ekkor $\exists$ olyan $x \in H$, amelyre a $c_n = (x, e_n)$ $\forall$ n-re, és $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

T.: $\sum_{1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = x \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$

F: Biz.: H végtelen dim. szeparábilis Hilbert-tér $\wedge$ $E := \{x : x \in H, \|x\| \le 1\} \Rightarrow$

E nem kompakt. ($\mathbb{R}^n$-ben ez a halmaz kompakt.)

T.: Minden végtelen dim. szeparábilis Hilbert-tér izomorf ℓ^2-vel.

D_2 D_3

pl: origó középpontú r sugarú körlap, r sugarú a gömb.

$[-\pi, \pi]$ intervallumon vesszük a köv. fgv-eket:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \dots$$

Lebesgue integrálai kéne, de itt az megegyezik a Riemann integrállal.

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{önmagával vett szorzata}} = \frac{1}{2\pi} \to \text{integráljuk} \to 1. \checkmark$$

ortonormált-rendszer.

$f: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) := \frac{\pi - x}{2}$