1. 1.

1. előadás

Axiomatikus felépítés:

Axióma: bizonyítás nélkül elfogadott tétel, állítás

Bizonyítás: az előtte álló definíciókat használjuk fel.

Alapfogalmak: Olyan fogalmak, melyeket nem definiálunk.

Axiómák	alapfogalmak
↓	↓
tételek	definíció
↓	↓
tételek	definíció
⋮	⋮

Hajós György: Bevezetés a geometriába !

Pelle Béla: Geometria (fgy)

Síkgeometria

I. tétel

Alapfogalmak:

a, pont

b, egyenes

c, sík

d, illeszkedés

1. axióma: $\forall$ két pontra egy és csakis egy egyenes illeszkedik.

2. axióma: $\forall$ 3 nem egy egyenesre illeszkedő pontra egy és csakis egy sík illeszkedik.

3. axióma: Ha egy egyenesnek két pontja illeszkedik egy síkra, akkor minden pontja illeszkedik rá.

1, 2, 3, → illeszkedési axiómák

1. Def.: Az egy egyenesre illeszkedő pontokat KOLLINEÁRIS pontoknak, az egy síkra illeszkedő pontokat KOMPLANÁRIS pontoknak nevezzük.

1 Tétel.: Két (különböző) egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet

Biz.: Tfh.: két közös pontjuk van. ⇒ I. ax. miatt a két egyenes ugyanaz ↯ különböző egyenes

2. Def.: Ha két egyenesnek egy közös pontja van, akkor metsző egyeneseknek nevezzük őket.

2. Tétel.: Egy egyenesnek és egy rá nem illeszkedő síknak legfeljebb egy közös pontja lehet.

Biz.: Tfh. két közös pontja van ⇒ III. ax. miatt ↯

3. Def.: Ha egy egyenesnek és egy síknak egy közös pontja van, akkor metszőknek nevezzük őket.

4. Def.: Az egyenest egy pontja két olyan ponthalmazra bontja, melyek uniója a teljes egyenes, metszetük a pont. Ezen ponthalmazok neve: félegyenes

5. Def.: A síkot egy egyenes két olyan ponthalmazra bontja, melynek uniója a teljes sík, metszetük az egyenes.
Ezen halmazok neve a félsík.

6. Def.: A teret a síkja 2 olyan ponthalmazra bontja, melynek uniója a tér, metszete a sík.
Ezen halmazok neve a féltér.

3.

7. Def.: Adott egy egyenes és azon két pont, A és B, akkor az A kezdőpontú, B-t tartalmazó félegyenes és a B kezdőpontú A-t tartalmazó félegyenes metszete az AB szakasz.
A A és B a szakasz végpontja. A többi pontja a szakasz belső pontja.

8. Def.: Egy szakasz és egy egyenes ill. egy szakasz és 1 sík metszőek, ha a szakasz egyenese metsző az egyenessel és a síkkal, és a metszéspont a szakasz belső pontja.

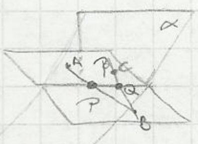
4. axióma: Ha adott egy egyenes és azon egy P pont, ⇒ az egyenes A és B pontja a P által meghatározott különböző félegyenesekre esik, pontosan akkor és csakis akkor, ha P az AB szakasz belső pontja.

5. axióma: Ha adott egy sík és azon egy „e" egyenes, akkor a sík A és B pontja az „e" egyenes által meghatározott különböző félsíkokba esik, ha az AB szakasz és az „e" egyenes metszőek.

6. axióma: Adott egy sík. Ekkor a ~~sík~~ tér A és B pontja a sík ált. meghatározott féltérben. helyezkedik el ⇔ ha A és B szakasz és a sík metszőek

3. Tétel: Ha két síknak van egy közös pontja ⇒ közös pontjaik egy egyenesre illeszkednek.

Biz.:



$P \in \alpha$

$P \in \beta$

P belső pontja $\overline{AB}$-nak

AB és α metszőek

B és C α-hoz képest különböző féltérben van

BC és α metszőek (6. ax.)
$\Rightarrow$ metszéspont Q

P és Q illeszkedik α-ra és β-ra is $\Rightarrow$ PQ egyenes illeszkedik α-ra és β-ra (3. ax miatt)

α-nak és β-nak a PQ egyenesen kívül más közös pontja nincs, mert ha lenne, $\Rightarrow$ a 2. ax. miatt egybeesnének.

Def.: A fenti két síkot metszőnek nevezzük, a közös egyenes neve: metszésvonal.

3.

11. tétel

2. előadás

Szakasz- és szögmérés

7. axióma: Minden szakaszhoz egyértelműen hozzárendelhető egy pozitív valós szám ($\mathbb{R}^+$), melyet a szakasz hosszának nevezünk.

Ha adott az egység, egy $\mathbb{R}^+$ és egy A kezdőpontú félegyenes, akkor a félegyenesen egyetlen olyan B pont van, hogy az AB szakasz hossza az egységhez képest az adott szám.

8. axióma: Ha egy szakaszt egy belső pontjával két szakaszra osztunk, akkor a részszakaszok hosszának összege az eredeti szakasz hosszával egyenlő.

(Csak akkor igaz, ha véges sok pont darabolja)

Megjegyzés: A szakaszmérés végesen additív.

4. Tétel: (8. axióma kiterjesztése): Ha egy szakaszt véges sok diszjunkt szakaszra osztunk, akkor a részszakaszok hosszának az összege az eredeti szakasz hosszát adja.

Biz.: teljes indukcióval

2 osztásra $\Rightarrow$ (8. ax.) ha k-ra igaz $\Rightarrow$ k+1-re a 8. ax. miatt igaz

9. Def.: Két szakasz egyenlő v. egybevágó, ha ugyanazt a pozitív valós számot rendeltük hozzá (ha a hosszuk egyenlő)

10. Def.: Két pont távolsága az őket összekötő szakasz hossza.

11. Def.: Két közös kezdőpontú félegyenes a síkot két diszjunkt részre osztja, melyeket szögtartományoknak v. egyszerűen ∡-nek nevezünk. A két félegyenes a szög szára, a közös kezdőpont a szög csúcsa.

9. axióma: Minden szöghöz egyértelműen hozzárendelhető egy $\mathbb{R}^+$ szám, a szög mértéke.

Ha adott az egység, egy $\mathbb{R}^+$ szám, egy félsík és ennek határán egy félegyenes A kezdőponttal, akkor egyetlen olyan A kezdőpontú félegyenes van az adott félsíkon, hogy a két félegyenes által meghatározott szög mértéke az egységhez képest az adott szám.

10. axióma: Ha adott egy A csúcsú szög és egy A kezdőpontú, a szögtartományban haladó félegyenessel a szöget két részszögre osztjuk, akkor a részszögek mértékének összege az eredeti szög mértékét adja.

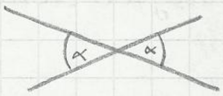
5. Tétel: Ha a szöget a csúcsából kiinduló, a szögtartományon belül haladó félegyenesekkel véges sok diszjunkt részre osztjuk, akkor a részszögek mértékének összege az eredeti szög mértékét adja.

Biz.: Teljes indukcióval

Megjegyzés: A szögmérés végesen additív.

12. Def.: Két szög egyenlő v. egybevágó, ha ugyanazt a $\mathbb{R}^+$ számot rendeltük hozzá.

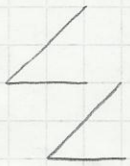
13. Def.: Két metsző egyenes két-két páronként egyenlő szöget határoz meg. A két egyenes szöge ezek közül a nem nagyobb.



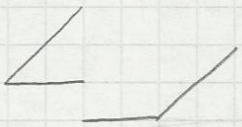
Nincs olyan két egyenes, (pl.) amelynek a szöge 120°.

a, párhuzamos szárú szögek:

a,



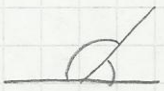
b,



180°-ra egészítik ki egymást

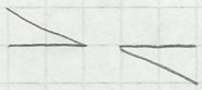
KIEGÉSZÍTŐ ∡-ek

c,



MELLÉK ∡-ek

d,



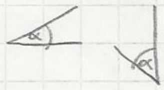
váltó ∡-ek

e,

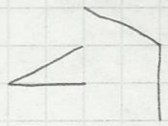
csúcs ∡-ek

b, merőleges szárú szögek:

a,



b,



180°-ra eg.ki. egymást

c,

pót∡-ek

14. Def.: Ha két síkbeli egyenesnek nincs közös pontja, akkor párhuzamosoknak nevezzük őket.

15. Def.: Két párhuzamos egyenes szöge 0°.

16. Def.: Két síkbeli egyenes merőleges, ha az általuk meghatározott négy szögtartomány egyenlő.

III. tétel

Egybevágósági transzformációk:

17. Def.: Ha adott két ponthalmaz, A és B, akkor az A ⇒ B kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést leképezésnek nevezzük.

Ha A = B, akkor a leképezés transzformáció.

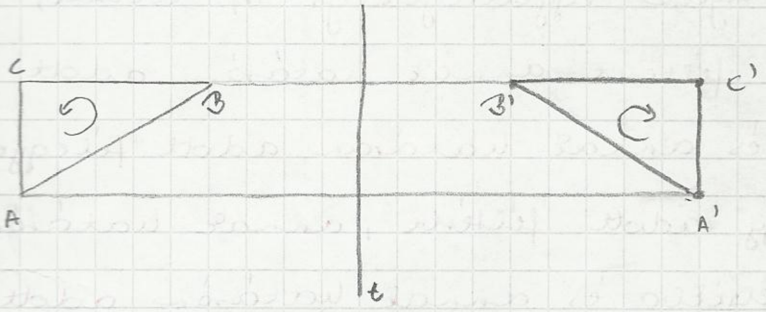
(1 ponthalmazt mindig önmagára képez le.)

2. 3. előadás

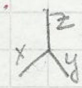
*

18. **Def.:** Egy transzf. távolságtartó, ha két pontnak és azok képének távolsága egyenlő. A távolságtartó transzf.-kat egybevágósági transzf-nak is nevezzük.

Mj.: A távolságtartásból a $\sphericalangle$-tartás következik



19. **Def.:** Ha adott 3 közös kezdőpontú, általános helyzetű félegyenes, x, y és z, akkor ezek, ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, ha a z irányából nézve az x 180°-nál kisebb, az óramutató járásával ellentétes irányú szöggel beforgatható y-ba. Ellenkező esetben a rendszer balsodrású.



20. **Def.:** Egy térbeli egybevágósági trf. megtartja az orientációt (irányítástartó), ha jobbsodrású rendszert jobbsodrásúba, balsodrású rendszert balsodrásúba visz át. Ellenkező esetben irányításváltó a trf.

* Egybevágósági transzformáció?

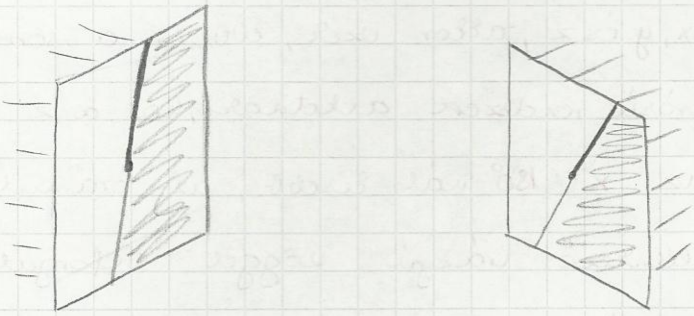
Def: Ha adott 2 ponthalmaz A és B akkor az A→B kölcs. egyértelmű megfeleltetést leképezésnek nevezzük. Ha A = B, akkor a leképezés transzformáció

eb trf: egybevágósági transzformáció
transzf./trf: transzformáció
$\sphericalangle$ tartó: szögtartó
távtartó: távolságtartó

21. Def.: Egy síkbeli egybevágósági trf. megtartja az orientációt (irányítástartó), ha ∀ Δ-nek és képének a körüljárási iránya nem változik. Ellenkező esetben irányításváltó trf.

Def.: Az irányítástartó e trf. neve: MOZGÁS.

11. axióma: Egyetlen olyan egybevágósági trf. létezik, mely egy félteret annak határán adott félsíkot, és annak határán adott félegyenest egy adott féltérbe, annak határán adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe visz át.

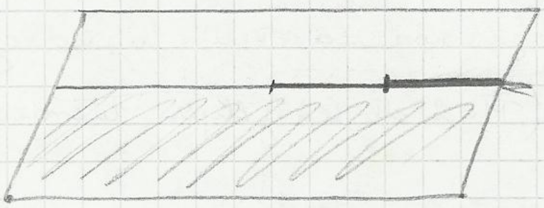


22. Def.: Egy trf-ra nézve egy alakzat FIX, ha minden pontja önmagába megy át (helyben marad)

23. Def.: Egy trf-ra nézve egy alakzat INVARIÁNS, ha a képe önmaga.

24. Def.: Ha az e trf-ra nézve egy féltér, annak határán lévő félsík invariáns, és a félsík határán lévő félegyenes és képe egy egyenesre esik, úgy, hogy metszetük egy félegyenes,

akkor a tf neve: ELTOLÁS.



25. Def.: ~~Ha az~~ ~~e~~ tf-nak ∃ pontosan egy fixpontja, és irányítástartó, akkor a neve: PONT KÖRÜLI ELFORGATÁS.

26. Def.: Ha a térbeli e tf-nak ∃! egy fixpontja és irányításváltó, akkor a neve: PONTRA VALÓ TÜKRÖZÉS.

27. Def.: Ha az egybevágósági tf-nak ~~∃!~~ egy fix síkja (és irányításváltó), akkor a neve: SÍKRA VALÓ TÜKRÖZÉS.

28. Def.: Ha egy térbeli e tf.-nak ∃! egy fix egyenese, akkor neve: TENGELY KÖRÜLI ELFORGATÁS.

29. Def.: Ha egy síkbeli e tf-nak ∃! egy fix egyenese, akkor neve: TENGELYES TÜKRÖZÉS.

Mj.: mozgások térben: eltolás, elforgatás (pont v. egyenes körül)
(térbeli egyenesre való tükr.)

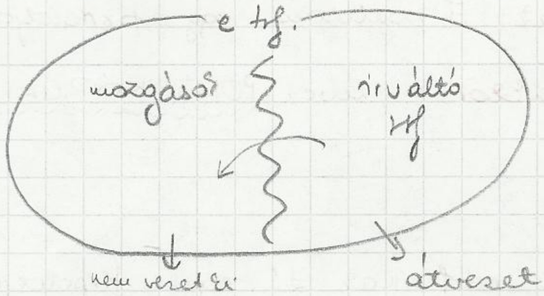
síkban: eltolás, elforgatás (pont körül)

e tf.: (⇒ ir. váltók) térben: síkra való tükrözés, pontra való tükr.
síkban: egyenesre való tükrözés

∃!: létezik pontosan

Mj.: Egybevágósági tf-ok sorozata (egymás után való elvégzése) e tf., mozgások sorozata mozgás.

Irányításváltó e tf-k sorozata nem mindig irányításváltó. (Pl.: 2 db tengelyes tükrözés)



6. Tétel: Az e tf-ok halmaza az egymás után ~~való~~ elvégzésre, mint műveletre nézve csoportot alkot. A mozgások halmaza ugyanerre a műveletre nézve szintén csoportot alkot, mely csoport az egybev. tf.-ok csoportjának részcsoportja.