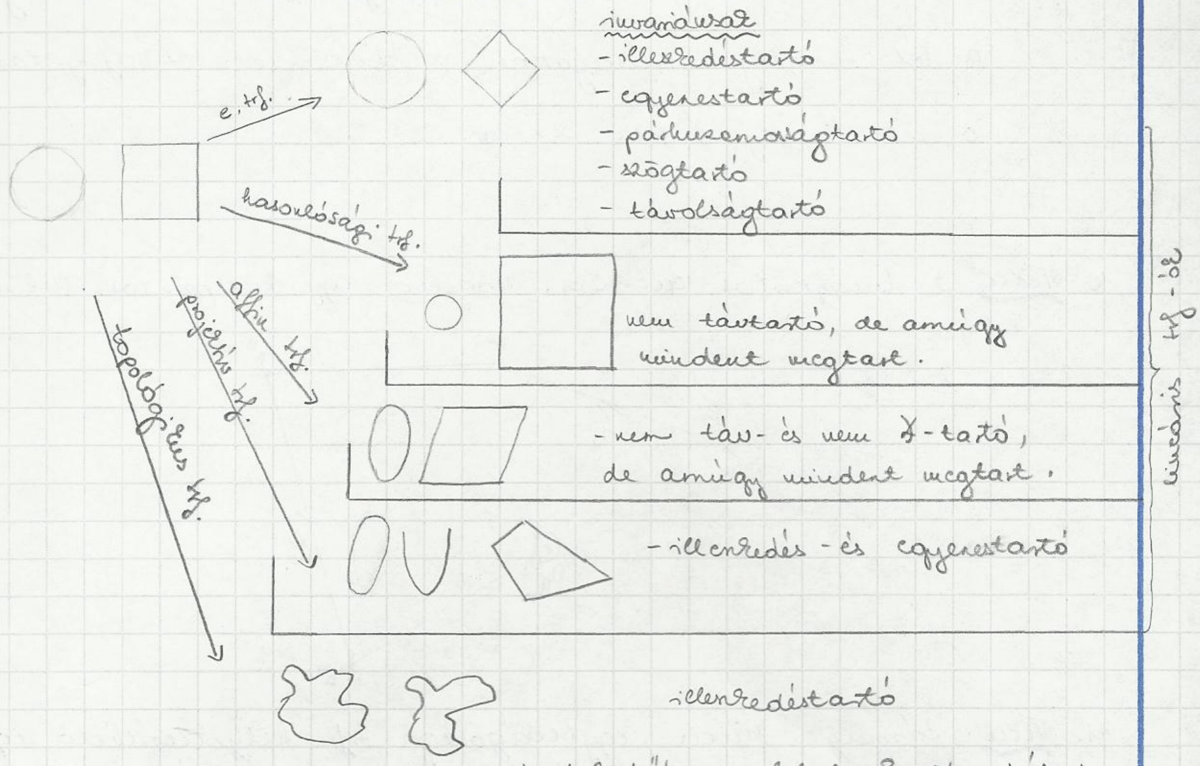
4. előadás



pl.: A E-ből nem lehet 8-ast csinálni

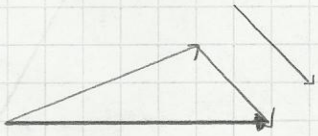
pl.: lehet: D → O, T → E

nem lehet: D → E, T → O, E → O

Helyettesítő tételek.

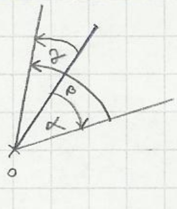
7. Tétel: Két eltolás szorzata eltolás.

Biz.:



8. Tétel: Két azonos középpont körüli elforgatás szorzata elforgatás.

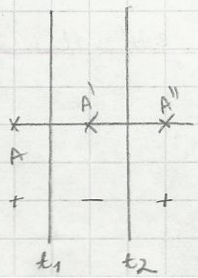
Biz:

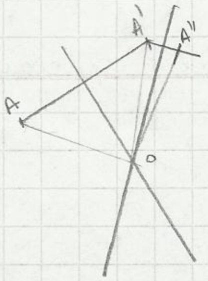


$\gamma = \alpha + \beta$ előjelesen

9. Tétel: Két tengelyes tükrözés szorzata eltolás, ha a tengelyei párhuzamosak, és elforgatás, ha a tengelyek metszőek.

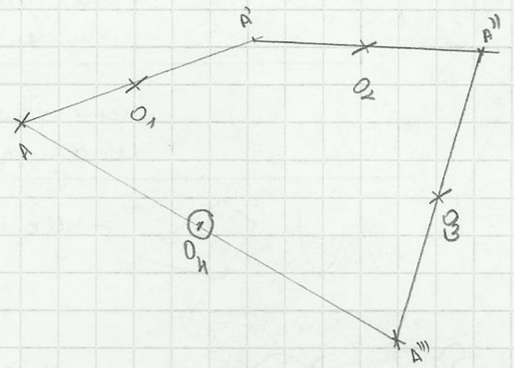
Biz:





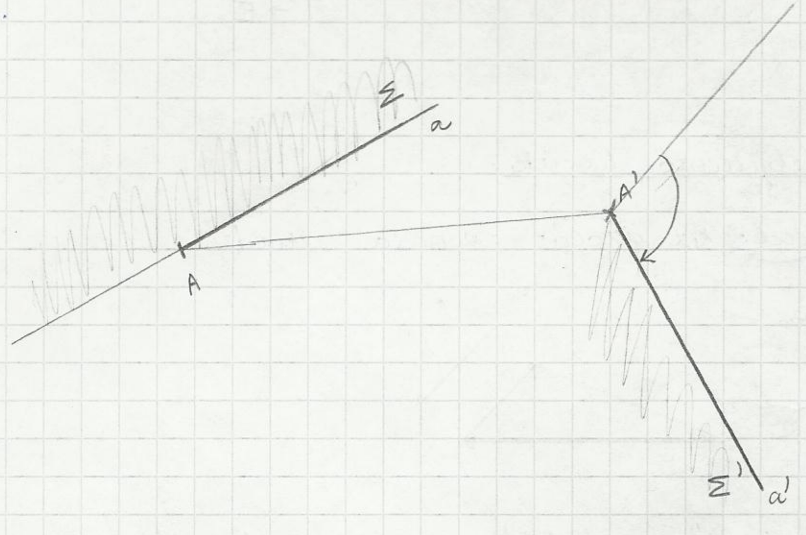
Megj.: Az eltolás iránya $\perp$ a tengelyekre, a hossza pedig a két tengely kosszúságának a kétszerese. Az elforgatás $\measuredangle$-e a két tengely $\measuredangle$-ének $2\times$-ese.

10. Tétel: 3 középpontos tükrözés szorzata egy középpontos tükrözés.



11. Tétel: Bármely síkbeli egybevágósági tf helyettesíthető egy eltolás, egy elforgatás és esetleg egy tengelyes tükrözés szorzatával.

Biz.:



$A \to A'$ eltolás
$a \to a'$ elforgatás
$\Sigma \to \Sigma'$ tengelyes tükrözés

Következmény: $\forall$ síkbeli mozgás helyettesíthető egy eltolás és egy elforgatás szorzataként

30. Def.: Két alakzat egybevágó, ha e tf-val egymásba vihetők.

Σ: szigma

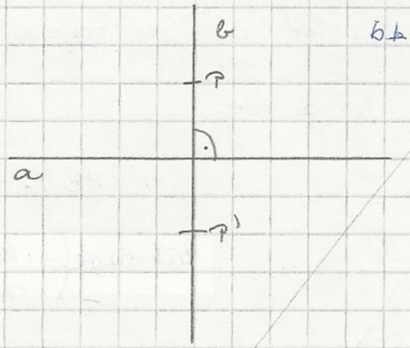
III. 10.

5. előadás IV. tétel

Merőlegesség

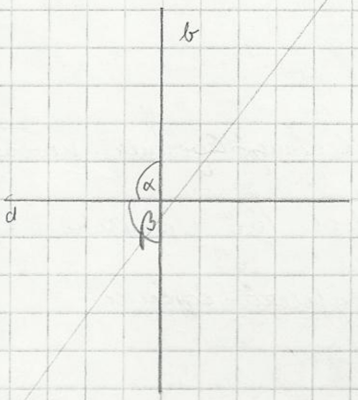
Tétel: Két egyenes, a és b merőlegesek egymásra, $\Leftrightarrow$ ha az a-ra való tükrözéskor b invariáns.

Biz.:



$b \perp a$: $P \in b \Rightarrow P' \in b$

illeszkedik



invariáns

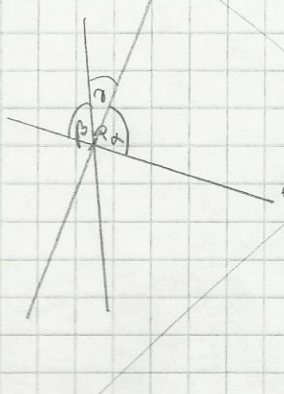
$\alpha \to \beta$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \beta \Rightarrow \text{szögtartó a tükr.} \end{array}\right\} \alpha = 90^\circ$

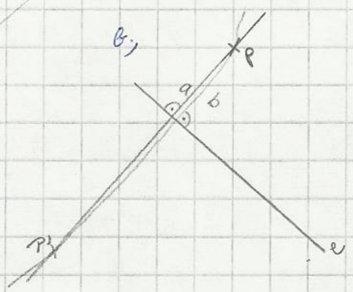
Tétel: Egy egyenesre 1 ponton keresztül a síkon egyetlen merőleges egyenes állítható.

Biz.:

a)



b)



Tfh: $\alpha, \beta = 90°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\Downarrow$

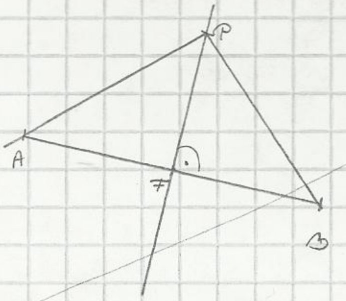
$\gamma = 0°$

P, P' —•— a, b

1. axióma miatt $\Rightarrow a \equiv b$

Tétel: A sík két pontjától, A-tól és B-től egyenlő távol lévő pontok mértani helye az az egyenes, mely $\perp$ az AB szakaszra és felezi azt.

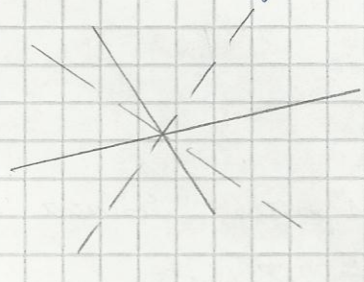
Biz.:



PA = PB, mert APF szakaszt tükrözve $\left(\Rightarrow \begin{matrix} A \to B \\ P \to P \end{matrix} \right)$ BPF szakaszt kapjuk.

Def.: A fenti egyenest az $\overline{AB}$ felezőmerőlegesének nevezzük.

Tétel: Két metsző egyenestől egyenlő távol lévő pontok mértani helye a két egyenes szögfelező egyenesei.



4-5.

Δ-ek és sokszögek szögei

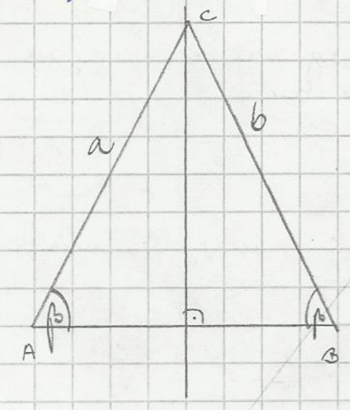
Def.: Ha adott az $A_0\ A_1 \dots A_n$ pontsorozat, akkor az A_0A_1, $A_1A_2 \dots$, $A_{n-1}A_n$ szakaszok összességét törött vonalnak nevezzük. A törött vonal zárt, ha $A_n = A_0$. A zárt törött vonal neve sokszög (vagy n $\measuredangle$), a pontok a sokszög csúcsai, a szakaszok az oldalai.

A sokszög egyszerű, ha az oldalainak a csúcsokon kívül nincs közös pontja.

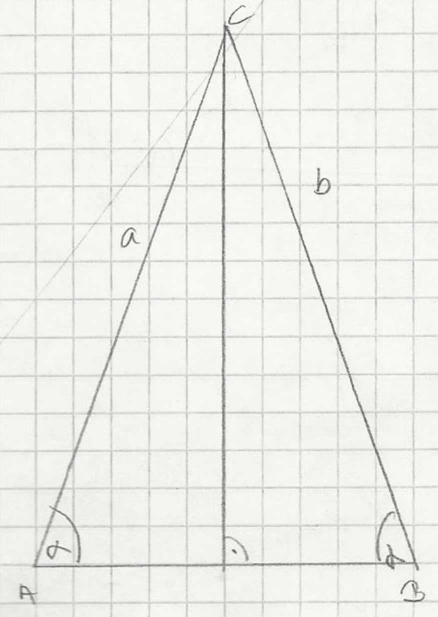
Def.: Egy Δ egyenlőszárú, ha két oldala egyenlő. Ezeket száraknak, a 3. oldalt alapnak nevezzük.

Tétel: Egy Δ egyenlőszárú $\Leftrightarrow$ ha 2 $\measuredangle$-e egyenlő.

Biz.:



$\alpha \overset{?}{=} \beta$ Tükrözzük: $\left.\begin{matrix} A \to B \\ B \to A \\ C \to C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \to \beta$ a tükr. $\measuredangle$ tartó $\Rightarrow \alpha = \beta$



$a \stackrel{?}{=} b$

tükrözünk:
$$\left.\begin{array}{l} A \to B \\ B \to A \\ \alpha \to \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\text{félegy.}}{AC} \to \overset{\text{félegy.}}{BC} \Rightarrow c \text{ fixpont} \Rightarrow$$ C illeszkedik a

tengelyre $= \underbrace{AC = BC}_{\text{tükr. távtartó}}$

Def.: Egy 3⦟ egyenlő oldalú, ha oldalai egyenlőek.

Tétel: Egy 3⦟ egyenlő oldalú ⇔, ha ⦟-ei egyenlőek.

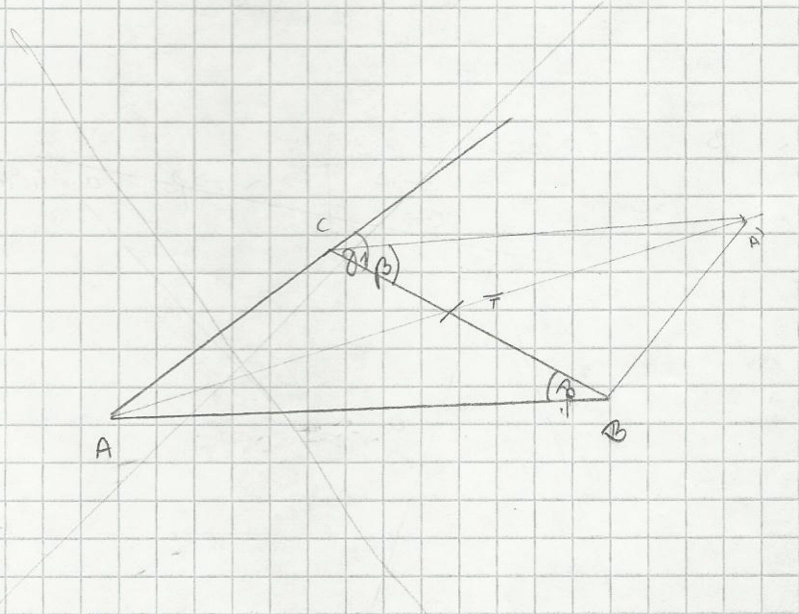
Def.: Egy sokszög szabályos, ha oldalai és ⦟-ei egyenlőek.

Következmény: Az egyenlő oldalú Δ szabályos.

Tudni kell: Δ-ü Δ, magasságvonal és mag. pont., súlyvonal és s.pont. köré és beírható kör.

Tétel: Egy Δ külső ⦟-e nagyobb, mint a nem mellette fekvő belső ⦟.

Biz.:



$\gamma_1 \stackrel{?}{>} \beta$

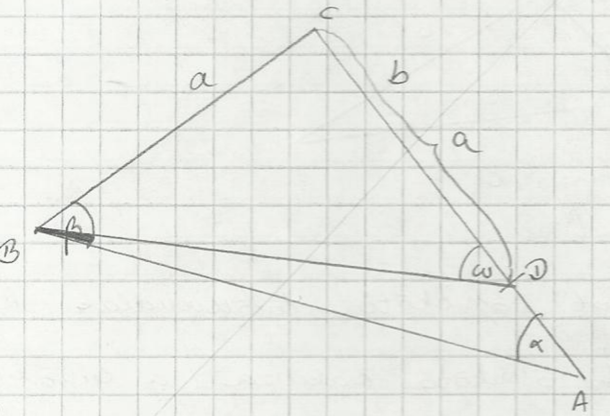
F-re tükrözöm a β-t

$$\left.\begin{array}{l} B \to C \\ A \to A' \\ C \to B \end{array}\right\}$$

A' az AC által meghatározott azon félsíkba esik, melyben F és B van.

Tétel: Egy Δ-ben egyenlő $\sphericalangle$-ekkel szemben egyenlő oldalak vannak, nagyobb $\sphericalangle$-gel szemben nagyobb oldal és viszont.

Biz.: 1. rész: az egyenlőszárú Δ-ek esete.



$a < b \overset{?}{\Rightarrow} \alpha < \beta$

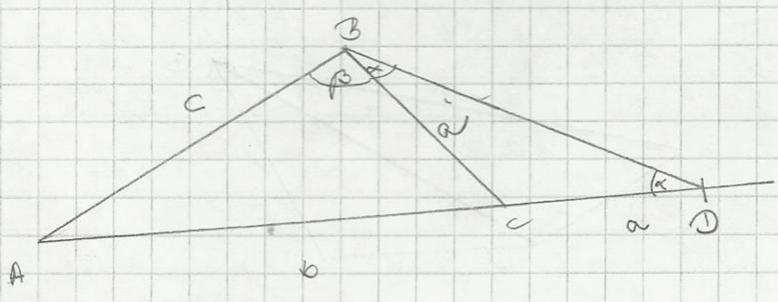
$BCD\ \Delta$ egyenlőszárú $\Rightarrow \omega = \beta - \sphericalangle \Rightarrow \omega < \beta$

$ABD\ \Delta$-ben α belső $\sphericalangle$, ω külső $\sphericalangle \Rightarrow \alpha < \omega$

$\Rightarrow \alpha < \beta$

másik irányba analóg módon lehet bizonyítani

Tétel: Egy Δ-ben $\forall$ 2 oldal hosszának összege nagyobb a 3. oldal hosszánál.



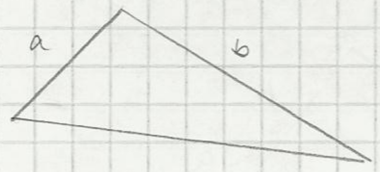
$a + b = AD$

$BCD\triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow CBD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \alpha$

$ABD\triangle$-ben α-val szemben c oldal, $\alpha+\beta$-val szemben $a+b$ oldal van $\underset{\text{előző tétel}}{\Rightarrow}$ $a+b>c$

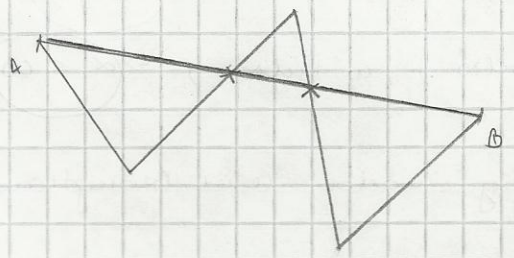
Következmény: Egy $\triangle$ $\forall$ oldala nagyobb, mint a másik kettő különbsége.

$a>b-c$
$a>c-b \Leftarrow a+b>c$

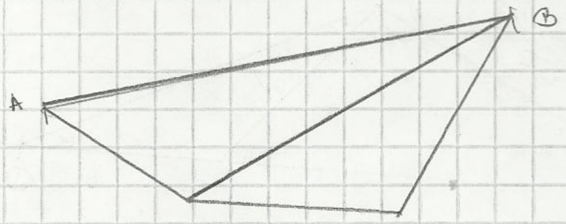


Tétel: Két pontot összekötő töröttvonalak közül a két pont összekötő szakasza a legrövidebb.

a,



b,



Bizonyítható a $\triangle$-egyenlőtlenség tételével!

6. előadás

V. tétel

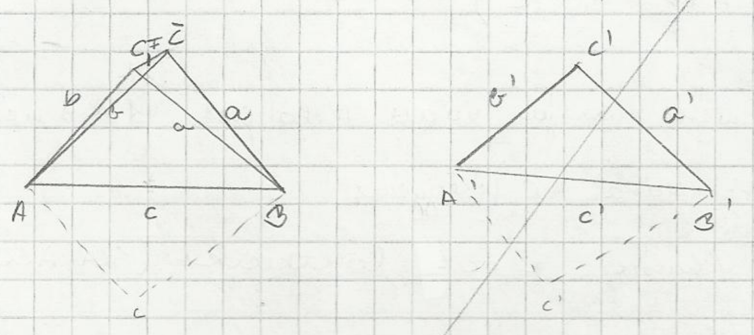
<u>Δ-ek egybevágósága:</u>

Tétel: Két Δ egybevágó, ha

1: 3 oldalhossza megegyezik
2: 2 oldala és a közbezárt ∡-e
3: 1 oldalának hossza és az azon fekvő 2 ∡-e
4: egy oldalának hossza és az azon fekvő szöge, és a szemben fekvő ∡-e.
5: Két oldalának hossza és a nagyobbikkal szemközti ∡-e.

(jel: $\bar{c} = c$)

Biz.: (1):



$\bar{a} = a$
$\bar{b} = b$
$\bar{c} = c$

1., $\bar{A} \to A$
$\bar{B} \to B$

(2., tengelyes tükr. ⇒ C és $\bar{C}$ egy félsíkban van AB-hez képest)

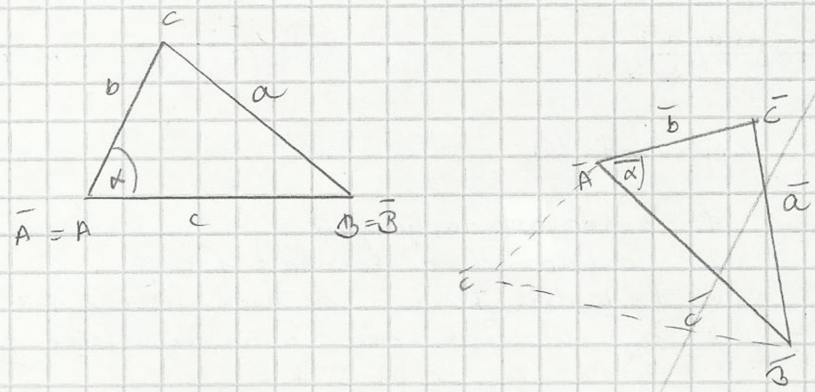
Tfh: $\bar{C} \neq C$

$\left.\begin{array}{l} C\bar{C}A\,\Delta \\ C\bar{C}B\,\Delta \end{array}\right\}$ egyenlő szárúak

Az alap felezőmerőlegese átmegy a csúcson

$\Rightarrow \begin{array}{l} A\,F \perp CC̄ \\ B\,F \perp CC̄ \end{array}$ ↯ , mert $C\bar{C}$-re F-en keresztül csak egy merőleges állítható

Biz (2).:



1., mozgás: $\bar{A} \to A$
$\bar{B} \to B$

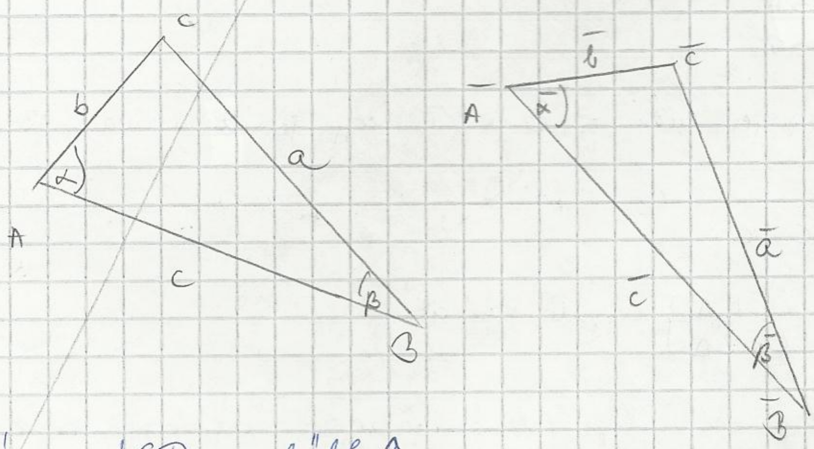
(2. tengelyes tükr. AB-re)

A ∢-mérés ax-ja miatt A-ból csak 1 α ∢ mérhető fel. ⇒

$\bar{\alpha}$ ∢ másik szára AC félegyenes

a $\bar{b}$-t felmérve $\bar{c} = c$ következik (SZAKASZMÉRÉS AX.)

Biz. (3)



1, 2. lépés lsd. előbb ↗

A ∢ mérés ax-ja miatt $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ másik szára egyértelmű.

AC ill BC félegyenesek $C = \bar{C}$