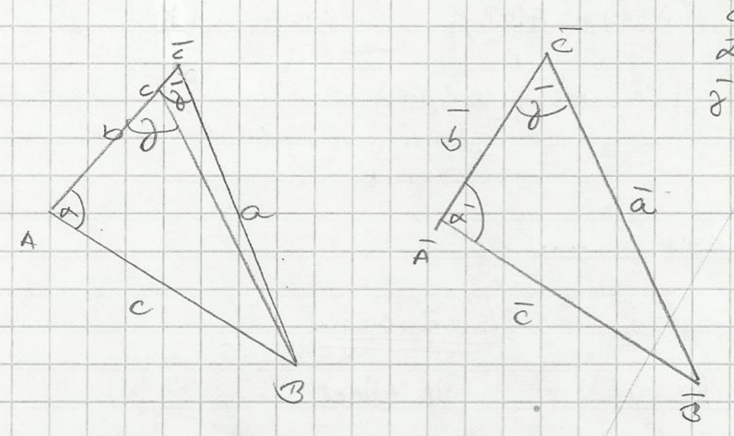
Biz (4)



$\bar{c} = c$
$\bar{\alpha} = \alpha$
$\bar{\gamma} = \gamma$

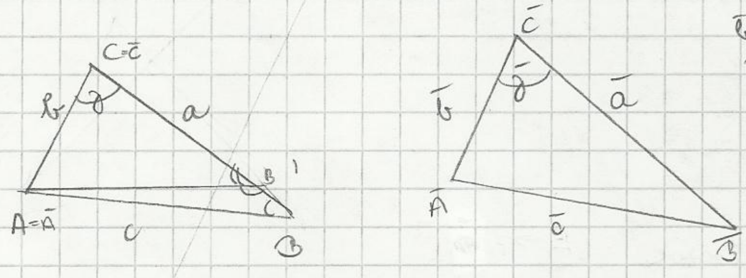
1 és (2) lépés LSD előbb ↑

$\Downarrow$

α és $\bar{\alpha}$ másik szára egybeesik a ∡ mérés axiómája miatt. AC félegyenes

Tfh $C \neq \bar{C} \Rightarrow C\bar{C}B\Delta$-ben γ külső ∡, $\bar{\gamma}$ belső szög $\Rightarrow \gamma > \bar{\gamma}$ ↯

Biz (5).



$\bar{c} = c$
$\bar{b} = b$
$\bar{\gamma} = \gamma$

1, $\left.\begin{matrix}\bar{A} \to A \\ \bar{C} \to C\end{matrix}\right\}$ mozgás

(2., tengelyes tükr.)

$\bar{B}$ és B 1 félsíkba esik

γ és $\bar{\gamma}$ másik szára egyértelmű (CB félegyenes)

Tfh: $\bar{B} \neq B$

$A\bar{B}B\Delta$ egyenlő szárú.

♡

$AB\bar{B}\sphericalangle = A\bar{B}B\sphericalangle$ ⇒ csak hegyes $\sphericalangle$-ek

$A\bar{B}B\sphericalangle$ tompa $\sphericalangle$

↯ mert $A\bar{B}$ Δ-ben a $c > b \Rightarrow \gamma > \beta$

Δ-ek szögei

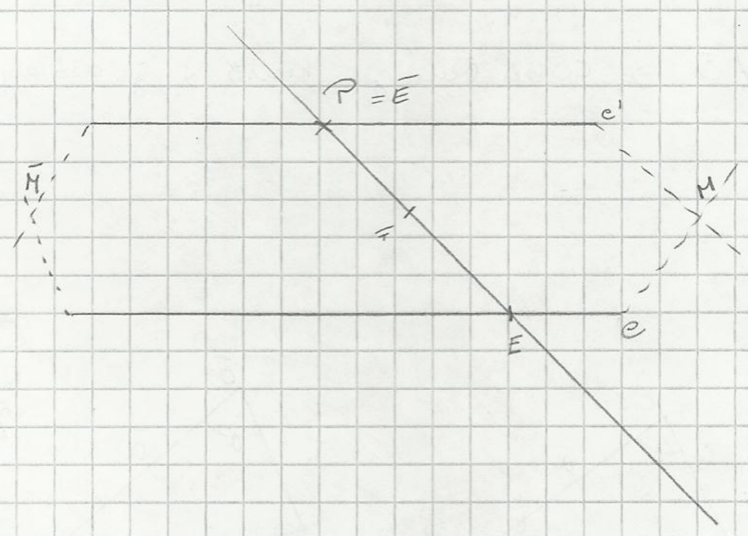
VI. tétel

||-ság:

Def.: Két síkbeli egyenes ||, ha nincs közös pontjuk.

Tétel: Egy egyenessel egy rá nem illeszkedő ponton keresztül húzható || egyenes.

Biz.:



$P \,\dot{-}\, e$

F-re tükrözve: $E \to P = \bar{E}$

$\bar{e} \parallel e$, mert Tfh $\exists\, M = e \cap \bar{e} \Rightarrow \bar{M} \multimap e, \bar{e} \Rightarrow$
a tükr. illeszkedéstartó volta miatt

$\Rightarrow$ e-nek és $\bar{e}$ két közös pontja van, M és $\bar{M}$. $\Rightarrow e = \bar{e}$

↯

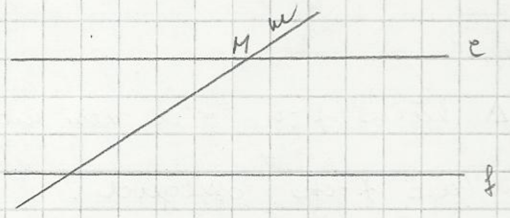
mert $P \multimap \bar{e}$ (ill.)
$P \,\dot{-}\, e$ (nem ill.)

12. axióma: Egy egyenessel egy rá nem illeszkedő

pontont keresztül csak 1 // egyenes húzható.

Tétel: Ha egy egyenes metszi két // egyenes egyikét,

$\Rightarrow$ a másikat is metszi.



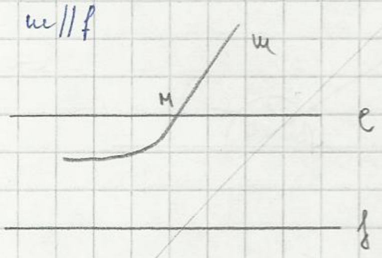
$e \parallel f$

$m \cap e = M$

Biz.:

Tfh: m nem metszi f-et

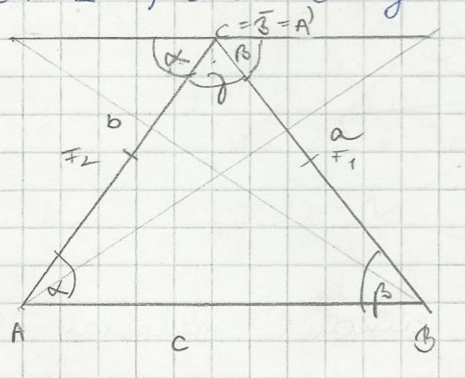
$m \parallel f$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ f-fel M ponton keresztül két ∥ húzható. ↯

12. ax.

Tétel: A Δ ∢-inek összege 180°.



1; F_1-re tükrözzük a β-t

$B \to C$

$B\bar{B}\bar{A}\sphericalangle = \beta$

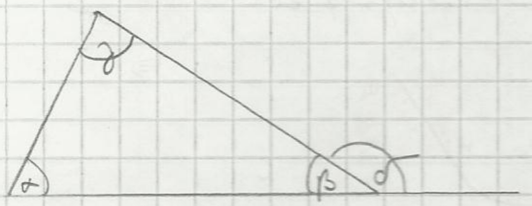
2.) F_2-re tükr. α-t $A \to C$

$AA'B'\sphericalangle = \alpha$

A tükr miatt.

$$\left.\begin{array}{l} C\bar{A} \parallel AB \\ CB' \parallel AB \end{array}\right\} \text{XII. ax. miatt} \Rightarrow \bar{A}, C, B' \text{ egy egyenesre esnek}$$

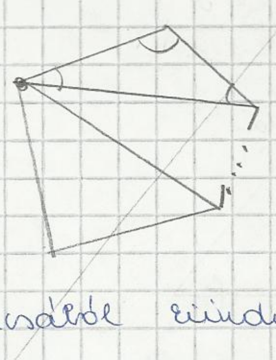
Következmény: Egy Δ külső $\sphericalangle$-e = a nem mellette fekvő belső $\sphericalangle$-ek összegével.



$$\left.\begin{array}{l} \beta + \delta = 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \alpha + \gamma = \delta$$

Tétel: A konvex n-$\sphericalangle$ $\sphericalangle$-einek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Biz.:

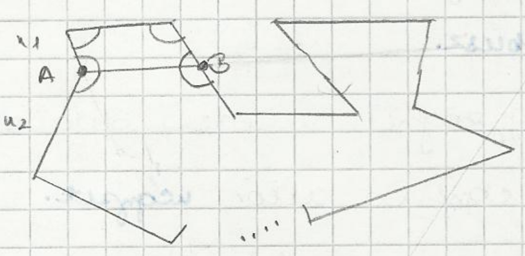


1 tetszőleges csúcsából kiinduló átlókkal $n-2$ db Δ-re bonthatjuk. A Δ szögei összesen kiadják az n-szög $\sphericalangle$-eit: $(n-2)180^\circ$

geo EA

Tétel: A konkáv n-szög szögeinek összege is $(n-2)\cdot 180°$.

Biz.:



Teljes indukcióval bizonyítunk a konkáv $\measuredangle$-ek száma szerint.

$n=0$-ra az előző tétel mondja ki.

Tfh $n=k$-ra igaz.

$n=k+1$

AB kettévágja a sokszöget n_1-szögre és n_2-szögre

$$n_1+n_2=n+3 \quad (2\times B, A)$$

$(n_1-2)\,180°$ + $(n_2-2)\,180°$ $-180°$ = az eredeti n-szög szögösszeg

$$\Downarrow$$

$$\left[(n_1+n_2)-5\right]\cdot 180° = (n+3-5)\cdot 180° = (n-2)\cdot 180°$$

7. előadás III.24

VII. tétel

<u>Speciális négyszögek:</u>

Def.: Ha egy négyszögnek két nemlenfekvő oldala $\parallel$, akkor **trapéz**.

Def.: Ha egy négyszögnek két-két nemlenfekvő oldala $\parallel$, akkor **paralelogramma**.

Def.: Ha egy négyszögnek minden ∡ egyenlő, akkor **téglalap**.

Def.: Ha egy négyszögnek minden oldala egyenlő, akkor **rombusz**.

Def.: Ha egy négyszögnek minden oldala és minden szöge egyenlő, akkor **négyzet**.

Def.: Ha egy négyszögnek két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor **deltoid**.

Tétel: Egy négyszög paralelogramma ⇔, ha két

1, két-két szemben fekvő ∡-e =.

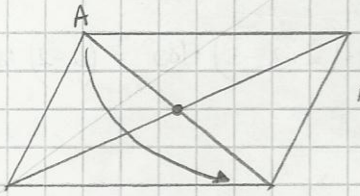
2, két-két szemben fekvő oldala =.

3, két szemben fekvő oldala ∥ és =.

4, középpontosan szimmetrikus.

5, átlói felezik egymást

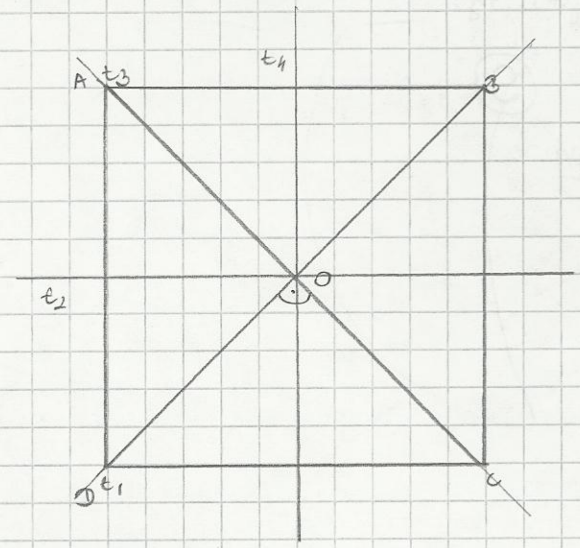
Biz.: def ⇒ 4. tul ⇒ a többi tulajdonság



Az átlók felezik egymást ⇒ 4. tul ⇒ biz-ható a többi tul!

Tétel: A négyszögek közül csak a paralelogramma, a téglalap, a rombusz és a négyzet középpontosan szimmetrikus és csak a téglalap, a rombusz, a négyzet, a deltoid és a szimmetrikus trapéz tengelyesen szimmetrikus.

A négyzet szimmetriacsoportja:



Melyek az ABCD négyzetet invariánsan hagyó trf-ók.

- O kp-ú kp-os elforgatás : C (centrális tükr.)
- O körüli $90°$, $180°$, $270°$, $360°$ fokos elforgatások (R_{90}, R_{180}...)
- tengelyes tükrözések t_1, t_2, t_3, t_4 tengelyre (T_{t_1}, T_{t_2}... stb)
- identikus leképezés (J)

Pl.: $R_{90} \cdot C \cdot T_{t_1} = T_{t_2}$

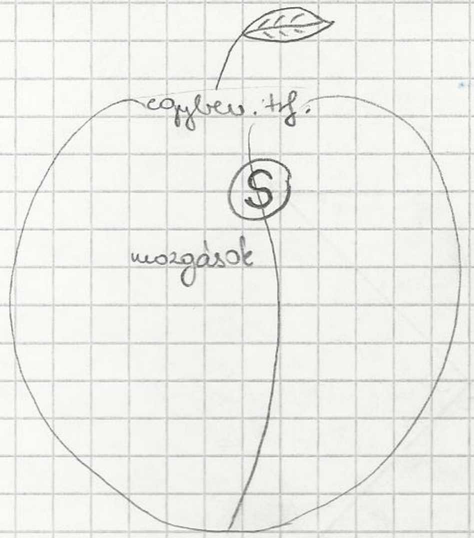
R_{90}	C	T_{t_1}	T_{t_2}
$A \to B$	$B \to D$	$D \to D$	$A \to D$
$B \to C$	$C \to A$	$A \to C$	$B \to C$
$C \to D$	$D \to B$	$B \to B$	$C \to B$
$D \to A$	$A \to C$	$C \to A$	$D \to A$

Ha a fenti trf-ók közül néhányat összeszoroznánk, ezek közül valamelyikhez jutnánk.

Tétel: Ha adott egy O kp-ú négyzet, melynek szimmetriatengelyei t_1, t_2, t_3 és t_4, akkor a négyzetet a következő trf-csoport tagjai hagyják invariánsan:

$$S = \{J, C_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, R_{360}, T_{t_1}, T_{t_2}, T_{t_3}, T_{t_4}\}$$

(ez egy véges csoport)

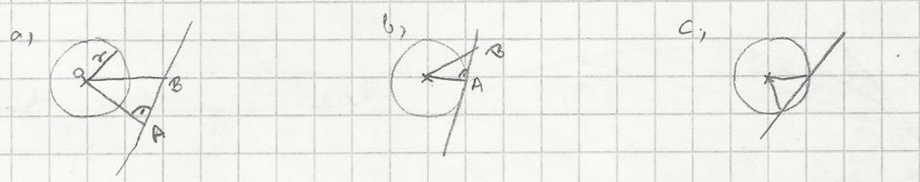

egybev. tf.
S
mozgások

geo.
6.

A kör

Def.: Egy adott ponttól adott távolságra elhelyezkedő pontok mértani helye.

Tétel: Egy körnek és egy egyenesnek 0, 1, v. 2 közös pontja van attól függően, h. az egyenesnek és a kör középpontjának távolsága nagyobb, egyenlő v. kisebb, mint a sugár.



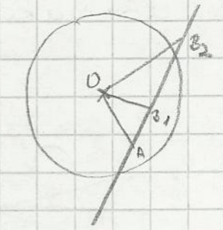
Biz., a, $OA>r$

$OB>OA>r \Rightarrow$ B nem lehet a körön

b, $OA=r$

$OB>OA=r \Rightarrow$ B nem lehet a körön

c, $OA<r$



$r>OB_1>OA$

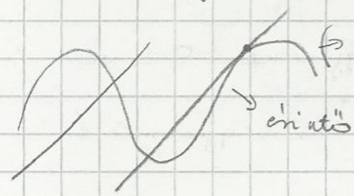
$OB_2>r$

$OB_1<r<OB_2$

$B_1 \longleftrightarrow B_2$ (egymás felé haladnak)

Def.: Ha az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ⇒ azt mondjuk, h. az egyenes <u>ELKERÜLI a kört</u>, ha egy közös pontja van ⇒ az egyenes neve <u>ÉRINTŐ</u>, és ha 2 közös pontja van ⇒ <u>SZELŐ</u>.

nem def-ható pl. görbékre, mert:



(⇒ sin görbe)

érintő, de nem 1 közös pontja van.

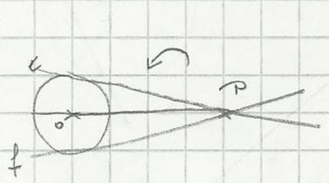
1 közös pontja van, de nem érintő

⇒ határhelyzethez tart.

Következmény: Az érintő ⊥ a kör középpontjából az érintési pontba állított sugárra

Tétel: Egy körhöz ∀ külső pontból két érintő húzható, mely egyeneseknek a pont és a kör közé eső szakaszuk egyenlő.

Biz.:



P-re állítok 1 egyenest és forgatjuk a kör „érintőjévé", majd az OP egyenesre tükrözzük.

ha e érintő ⇒ a PO-ra tükrözve is érintőt kapunk.