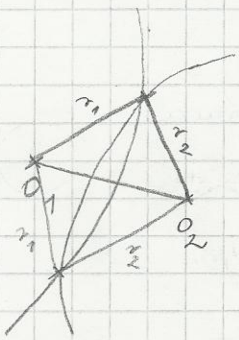
A tükrözés távolságtartó tul-a miatt $\Rightarrow \overline{PE} = \overline{PF}$

Tétel: Két körnek legfeljebb 2 közös pontja lehet

O_1, r_1
O_2, r_2



Ha $r_1 + r_2 > d(O_1, O_2)$

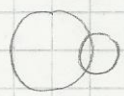
Következmény: A kört 3 pontja egyértelműen meghatározza

Tétel: Ha adott $\{O_1, r_1\}$ és egy $\{O_2, r_2\}$ kör $\Rightarrow$

1; $r_1 + r_2 < d(O_1, O_2) \Rightarrow$ nincs közös pont és a két kör egymáshoz képest csupa külső pontból áll.

2; Ha $r_1 + r_2 = d(O, O_2) \Rightarrow$ 1 közös pont van, és a körök kívülről érintik egymást

3; ha $|r_1 - r_2| < d(O_1 O_2) < r_1 + r_2 \Rightarrow$ 2 közös pont van és a körök metszik egymást



4; ha $|r_1 - r_2| = d(O_1 O_2) \Rightarrow$ 1 közös pont és a körök belülről érintik egymást

5., ha $|r_1 - r_2| > d(O_1, O_2) \Rightarrow$ nincs közös pont és az egyik a másikhoz képest csupa belső pontból áll.

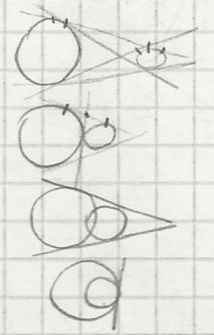
Tétel: Két kör közös érintőinek száma

1., esetben: 4 →

2., -"- : 3 →

3., esetben: 2 →

4., esetben: 1 →



5., esetben: 0

Következmény: Két kör közös érintőinek $\forall$ metszéspontjából kiinduló érintő szakaszok hossza egyenlő.

Def.: Egy kör két pontját összekötő szakasz neve <u>HÚR</u>. Ha a hossza a sugár 2x-ese $\Rightarrow$ <u>ÁTMÉRŐ.</u>

Def.: Egy kör két pontja közötti rész neve: <u>KÖRÍV</u>.

Tétel: Egyenlő körívekhez tartozó húrok egyenlők.

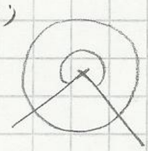
geometria

VIII. tétel

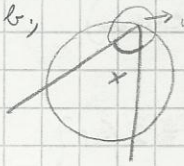
Def.: Ha adott 1 kör és egy szög csúcsa a kör középpontja ⇒ <u>KÖZÉPPONTI ∡</u>. (a;)

Ha a ∡ csúcsa a kör egy pontja, szárai a kör szelői és a ∡ konvex ⇒ a szög neve <u>KERÜLETI ∡</u>. (b;)

a;



b;



Def.: Ha a kerületi ∡ egyik szára a kör érintője, ⇒ a neve <u>ÉRINTŐSZÁRÚ KERÜLETI ∡</u>.

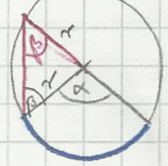
Tétel: Egy körben egyenlő ívekhez egyenlő középponti ∡-ek tartoznak.

Biz: Lsd az előző tételt.

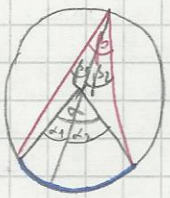
ugyanazzal az oldalhoz ugyanakkora ∡ tartozik.

Tétel: Egy körben egy adott ívhez tartozó középponti ∡ kétszerese az ívhez tartozó ∀ kerületi ∡-nek.

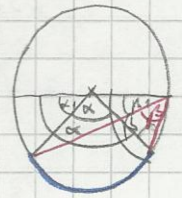
Biz: a;



b;



c;



a; mivel (piros Δ) egyenlő szárú Δ ⇒ 2β ∡-e van

A külső ∡ = a nem mellette fekvő belső ∡ összegével!

$\beta+\beta=\alpha \Rightarrow 2\beta=\alpha$

b., (a., értelmében)

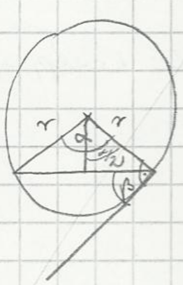
$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\beta_1 \\ \alpha_2 &= 2\beta_2 \end{aligned}\right\} +$$

$$\alpha = 2\beta$$

c., (a., értelmében)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\beta_1 \\ \alpha_2 &= 2\beta_2 \end{aligned}\right\} -$$

$$\alpha = 2\beta$$

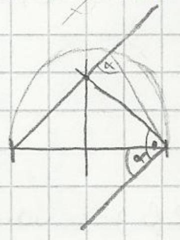


$\frac{\alpha}{2}$ ∡ szára ⊥ a β-hoz $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2}$ és β

⊥-es szárú ∡-ek $\Rightarrow \alpha = 2\beta$

Következmény: Egy körben egyenlő ívekhez egyenlő kerületi ∡-ek tartoznak

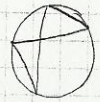
Tétel: Azon pontok mértani helye, melyekből egy adott szakasz adott ∡-ben látszik (az 180°-nál kisebb), két, a szakasz egyenesére szimmetrikus körív.



9. előadás

Húr és érintősokszögek

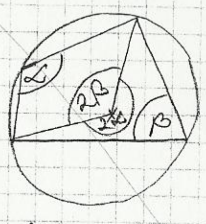
Def: Egy sokszög *húrsokszög*, ha minden csúcsa egy körre illeszkedik.


nem fordulhat elő

Def: egy sokszög *érintősokszög*, ha minden oldala egy kör érintője.

Tétel: Egy négyszög *húrnégyszög* $\Leftrightarrow$ ha szemben fekvő szögeinek összege $180°$.

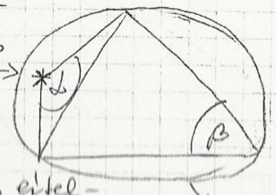
Biz: $\Rightarrow$



kössük össze a másik két csúcsot a középponttal

$2\alpha + 2\beta = 360° \Rightarrow$ áll., ha elosztjuk 2-vel.

$\Leftarrow$



$180° - \beta$ körív $\rightarrow$ α feltevés értelmében

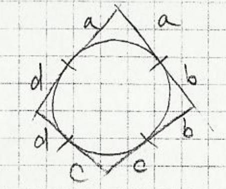
β körív

$\alpha + \beta = 180°$

* lehetetlen rajta lenni a körön

Tétel: Egy négyszög *érintőnégyszög* $\Leftrightarrow$ ha konvex és szemben fekvő oldalainak összege megegyezik

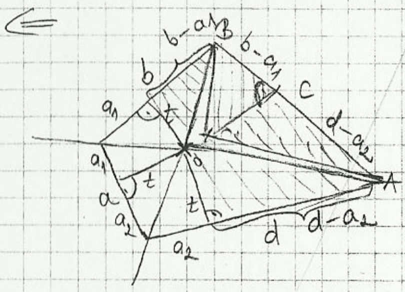
Biz: $\Rightarrow$



$(a+b)+(c+d) = (a+d)+(b+c)$

a szögek nem lehetnek konkáv $\measuredangle$

$\Leftarrow$



$a + c = b + d$

a szögfelezők a négyszögön belül esnek, mert konvex

t mindenhol $=$, mert a szögfelezőre tükröztük őket

Feltevésünk miatt $a + c = b + d \Rightarrow$

$\Rightarrow c = b + d - a$

$c = b + d - (a_1 + a_2)$

$c = (b - a_1) + (d - a_2)$

Ebből a talált pontból felmérem a t.

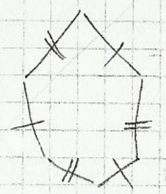
A_2 O_1 pontot összekötöm A és B ponttal, majd az O összekötöm az A, B ponttal

$\Rightarrow$ egybevágóak mert két oldaluk és a közbezárt szögük egyenlő $\Rightarrow \left.\begin{matrix} BO = BO_1 \\ AO = AO_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A$

$\Rightarrow ABO\triangle \cong ABO_1\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow O =$ ponttal

Mj: (1) Páros oldalszámú sokszögekre a húrnégyszögre vonatkozó tétel általánosítása nem igaz, az érintőnégyszögekre vonatkozó tétel általánosítása viszont igaz.



páratlan az összege ua. mint a páros oldalak összege

IX. tétel

Hasonlóság

Def: Egy transzformáció hasonlósági transzformáció, ha egyenestartó, illeszkedéstartó és $\forall$ két A, B pontra illetve képére, $\bar{A}$, $\bar{B}$-re az $\frac{AB}{\bar{A}\bar{B}}$ állandó, azaz aránytartó.

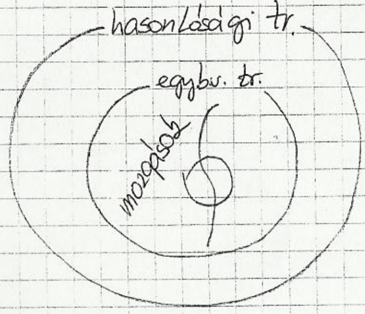
Tétel: A hasonlósági transzformáció az egymás után való elvégzésre, mint műveletre nézve csoportot alkotnak.

Biz: t_1 hasonlósági tr. : $\frac{AB}{\bar{A}\bar{B}} = \lambda_1$
t_2 —‖— : $\frac{\bar{A}\bar{B}}{A^*B^*} = \lambda_2$
$\Rightarrow \frac{AB}{A^*B^*} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \Rightarrow$ állandó

$\forall$ elemhez tudunk inverzet képezni
egységeleme is van, mert ez az önmagára való leképezés.

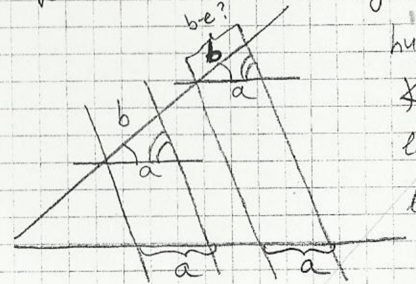
Mj: $\forall$ egybevágósági transzformáció egyben hasonlósági transzformáció is.

Köv: Az egybevágósági tr. csoportja a hasonlósági tr. csoportjának részcsoportja.



Tétel (párhuzamos szelők tétele) Ha egy szög két szárát ‖-os egyenesekkel metszük $\Rightarrow$ az egyik száron keletkezett szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok arányával.

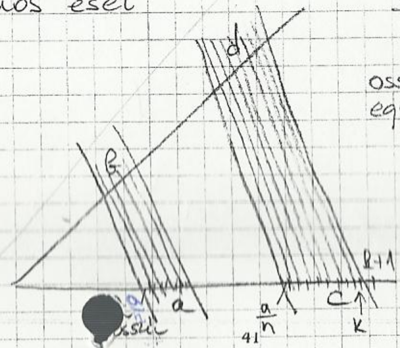
Biz:



húzzunk ‖-ost az alsó ∡ szárral $\Rightarrow$ létrejött egy paralelogramma
‖-os szárú szögek tehát

$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

általános eset



osszuk fel a-t n egyenlő részre

$$k\cdot\frac{a}{n} \le c < (k+1)\frac{a}{n} \qquad \frac{k}{n} \le \frac{c}{a} < \frac{k+1}{n}$$
$$k\cdot\frac{b}{n} \le d < (k+1)\frac{b}{n} \qquad \frac{k}{n} \le \frac{d}{b} < \frac{k+1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{c}{a} - \frac{d}{b}\right| < \frac{1}{n}$$

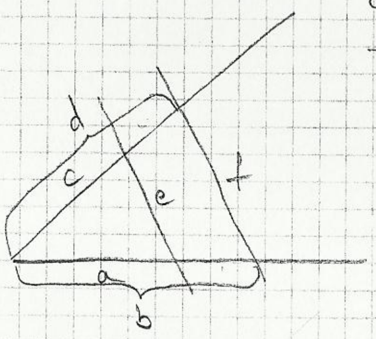
ha $n \to \infty \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Rightarrow$ áll.

Mj: a tétel megfordítása is igaz

Tétel: Ha egyenesek egy szög két szárát úgy metszik, hogy a keletkezett szakaszok aránya egyenlő $\Rightarrow$ az egyenesek $\parallel$-sak.

Tétel: Ha egy szög két szárát két $\parallel$-os egyenessel elmetszük $\Rightarrow$ a szárakon keletkezett szakaszok aránya megegyezik az egyenesekből kimetszett szakaszok arányával.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

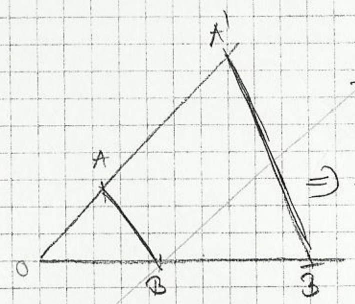


Biz: a $\parallel$-os szelők tételéből triviális

Def: Legyen adott egy O pont és egy $\lambda \in \mathbb{R}$. A sík $\forall P$ ($\neq O$-val betű) pontjához rendeljük hozzá azt a $\bar{P}$ pontot, mely az OP félegyenesen van és amelyre $\frac{O\bar{P}}{OP} = \lambda$. A fenti tr. neve középpontos hasonlóság. $(O = \bar{O})$

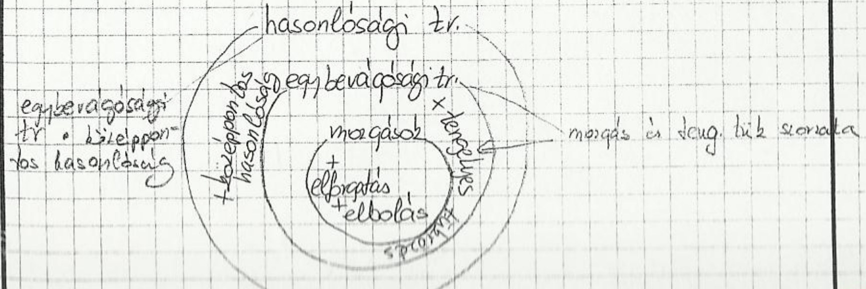
Tétel: A középpontos hasonlóság az hasonlósági transzformáció.

Biz: az előző tétel miatt érvényes



$$\frac{O\bar{A}}{OA} = \lambda, \quad \frac{O\bar{B}}{OB} = \lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB \parallel \bar{A}\bar{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\bar{A}\bar{B}}{AB} = \lambda$$

Tétel: $\forall$ hasonlósági transzformáció előáll egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció szorzataként



Def: két geometriai alakzatot hasonlónak nevezünk, ha ∃ olyan hasonlósági leképezés, mely az egyiket a másikba viszi át. Jelölése: $A \sim B$

Következmény: A hasonlósági reláció a síkidomok halmazán ekvivalenciareláció

1, $A \sim A$ identitás (A-hoz önmagát rendeli)

2, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ Ha a H hasonlóság átviszi A-t a B-be, akkor az inverze viszi B-t az A-ba.

3, Ha $A \sim B$ $B \sim C$. $A \sim C$ Ha $A \sim B$ H_1 hasonlóság viszi át, H_2 hasonlóság viszi át B-t a C-be. Az A-t a C-be $H_1 \cdot H_2$ viszi át.

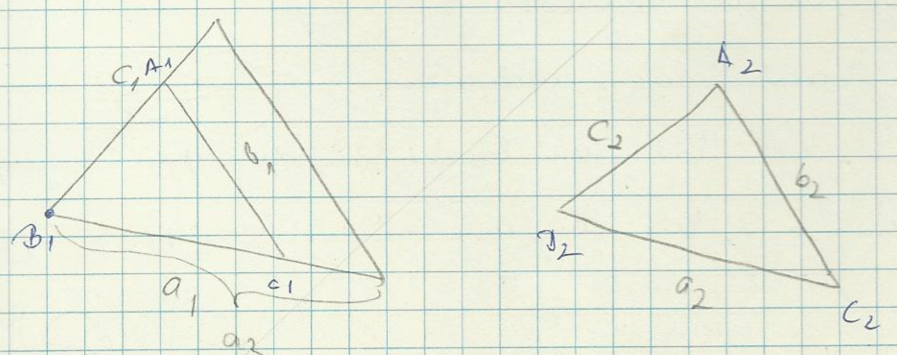
Tétel: 2 Δ hasonló, ha: a, 3 megfelelő oldaluk aránya =.

b, 2-2 megfelelő oldal aránya és a közbezárt ∢ egyenlő.

c, 2-2 megfelelő oldaluk aránya és a nagyobbikkal szemközti ∢ egyenlő

d, 2-2 szögük egyenlő

Biz.:



Legyen a_1, a_2 olyan oldalpár, amelyik az első 3 esetben szerepel, a 4-ben legyen ez a 2 egyenlő ∢.

Alkalmazzuk a B_1 centrumú m tényezős centrális hasonlóságot.

$a_2 = m \cdot a_1$

$a_3 = m \cdot a_1 = a_2$

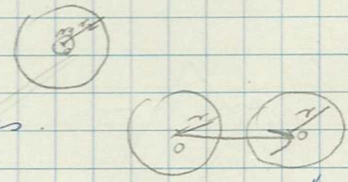
A centrális hasonlósággal kapott Δ egybevágó az $A_2B_2C_2$ Δ-gel, mert a megfelelő egybevágósági eset teljesül. Így az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ Δ hasonló, mert egy centrális hasonlósággal és egybevágósági transzformációval egymásba átvihetők.

Tétel: Hasonlósági leképezés kört körbe visz át.

Biz: m tényezős hasonlóság

A képalakzat minden pontja O'-tól mr azaz állandó távolságra van → kör.

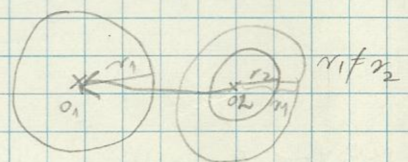
Tétel: Bármely 2 kör hasonló.



Biz: 1, Legyen a 2 kör koncentrikus.

2, Legyen a 2 kör nem koncentrikus, de egyenlő sugarú

3, Legyen a 2 kör nem koncentrikus, nem egyenlő sugarú.



1, $r_2 = m r_1$

$m = \frac{r_2}{r_1}$ kicsinyítő / centrális nagyítással (O centrumú)

8.

2, $O[E_{\overrightarrow{OO'}}]O'$

3, 1 centrális hasonlóság és egy eltolás szorzata, amely szintén hasonlóság

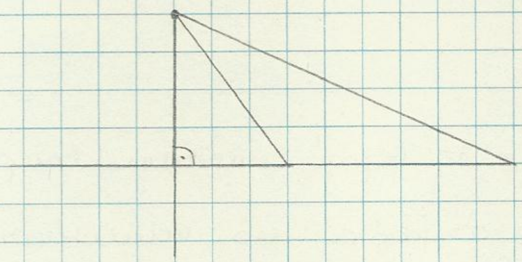
X. tétel

Háromszögre vonatkozó hasonlósági tételek

(Arányossági tételek)

Def.: A ∟-ű Δ-ben a legnagyobb söggel szemközti oldalt átfogónak, a másik kettőt befogónak nevezzük.

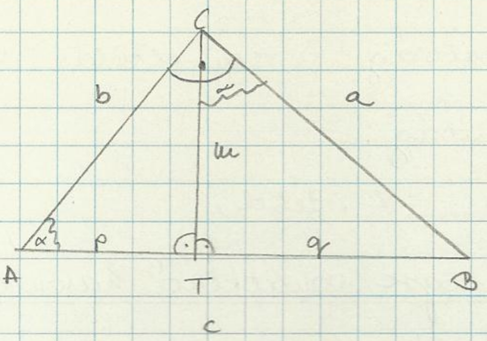
Def.: A Δ egy csúcsából a szemközti oldal egyenesére állított merőlegest a Δ magasságvonalának nevezzük.



A magasságvonalnak az oldal egyenesével való metszéspontja a talppont. A csúcs és a talppont által meghatározott szakasz a magasság.

Def.: Egy szakasznak egy egyenesre való merőleges vetületén értjük a szakasz minden pontjából az egyenesre állított merőlegesek talppontjainak a halmazát.

Tétel: (Magasságtétel). A derékszögű Δ-ben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe a két befogó átfogóra eső merőleges vetületeire.



Bizonyítás:

Állítás: $m = \sqrt{p \cdot q}$

$m^2 = pq$

Megmutatjuk, h. $ATC\Delta \sim TBC\Delta$

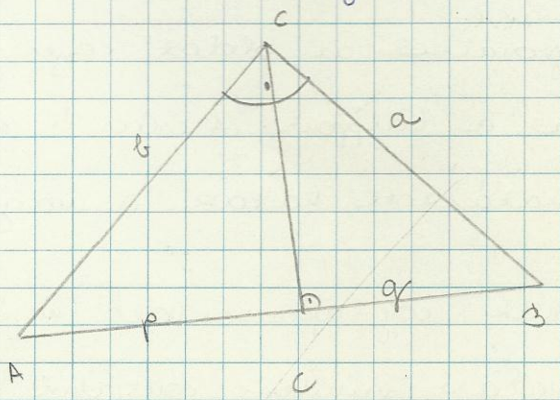
⊾, α-merőleges szárú ∡-ek, 1oldaluk

$p : m = m : q$

$m^2 = p \cdot q$

Tétel: (Befogótétel)

A ⊾-ü Δ-ben ∀ befogó mértani közepe az átfogónak és az átfogóra eső vetületének.



Bizonyítás:

Állítás: $a = \sqrt{c \cdot q}$

$ACB\Delta \sim CTB\Delta$ 1 ⊾∡ és 1 hasonló ∡