$$c:a = a:q$$

$$a^2 = c\cdot q$$

$$a = \sqrt{c\cdot q}$$

Tétel: (Pitagorasz-tétel)

Derékszögű Δ-ben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével

Biz.: jelölés: az előző ábrán!

Állítás: $c^2 = a^2 + b^2$

bef. tétel: $a^2 = cq$

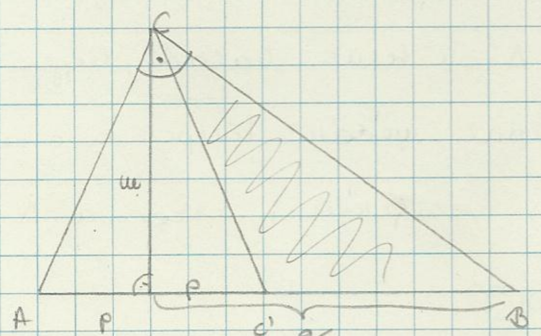
$b^2 = c\cdot p$

$$a^2+b^2 = c\cdot \underbrace{(p+q)}_{c}$$

$$\underline{\underline{a^2+b^2 = c^2}}$$

Mj.: A befogó és magasságtétel megfordításánál feltételként kell venni, h. a megfelelő magasság a Δ-ön belül haladjon.

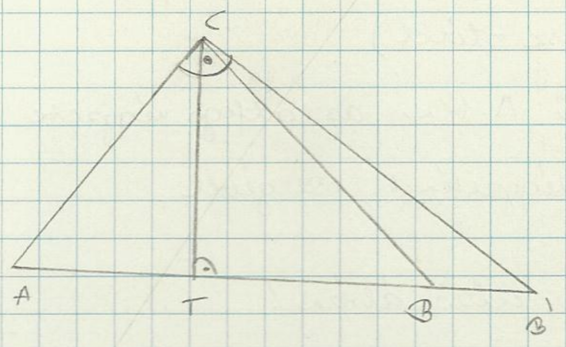
pl.:



A C'BC Δ-re teljesül, h. $m^2 = p\cdot q$, de tompa ∢-ű.

Tétel: Ha egy Δ-ben van olyan oldal, amelyhez tartozó magasság mértani közepe a másik két oldalnak az előző oldalra eső merőleges vetületének, akkor a Δ derékszögű, és a kiirtett oldal az átfogó.

Biz.: indirekt



Feltétel: $(CT)^2 = AT \cdot TB$

Tfh: C-nél lévő ∢ nem ⊾

ACB' Δ ⊾-ű ⇒ igaz rá a magasság tétel

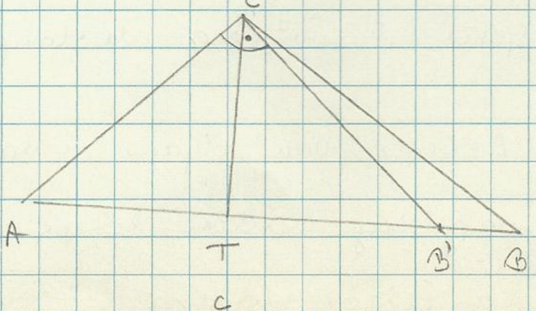
$(CT)^2 = AT \cdot TB'$

$TB = TB'$

Nem lehet két különböző pont ⇒ B=B', tehát a Δ valóban ⊾-ű.

Tétel: Bef-tétel megf.

Ha 1 Δ-ben van olyan oldal, amelyhez tartozó magasság a Δ-ön belül halad, legyen ez c és egy másik oldal mértani közepe a c-nek és a c-re való merőleges vetületének, akkor a Δ derékszögű, és a „c" az átfogó.



Feltétel: $(AC)^2 = AT \cdot AB$

Állítás: C-nél ⊾-van.

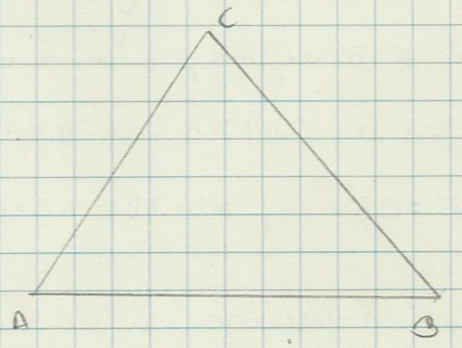
Biz: indirekt

$ACB'\Delta$ ⊾-ű, igaz a befogótétel

$(AC)^2 = AT \cdot AB'$ ⟶ $\underline{\underline{B = B'}}$

Pitagorasz-tétel megfordítása

Tétel: Ha egy Δ-ben valamely oldal négyzete megegyezik a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a Δ ⊾-ű.



Biz:

Feltétel: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Vegyünk 1 ⊾-et:

$A'C' = AC$

$B'C' = BC$

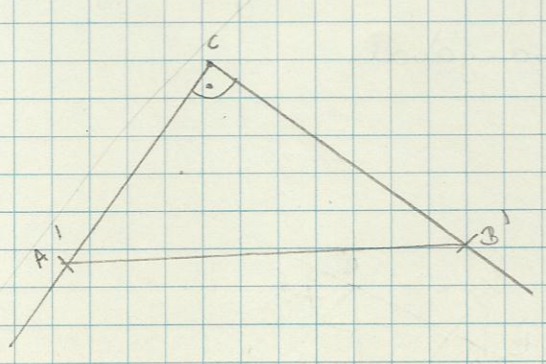
$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (B'C')^2$

$\Downarrow$

$(A'B')^2 = AB^2$

$\Downarrow$

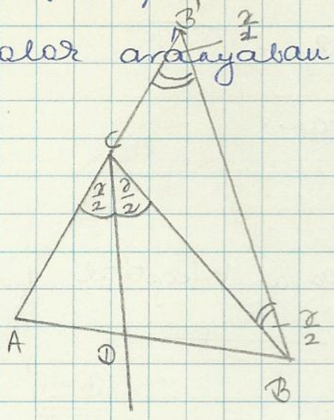
$A'B' = AB$



A 3 oldal egyenlősége miatt a 2 Δ egybevágó, a ∢-ek egyenlők ⇒ C-nél ⊾ van.

XI. tétel

Tétel: Egy Δ belső ∡-felezője a nemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.



Állítás: $AD : DB = AC : CB$

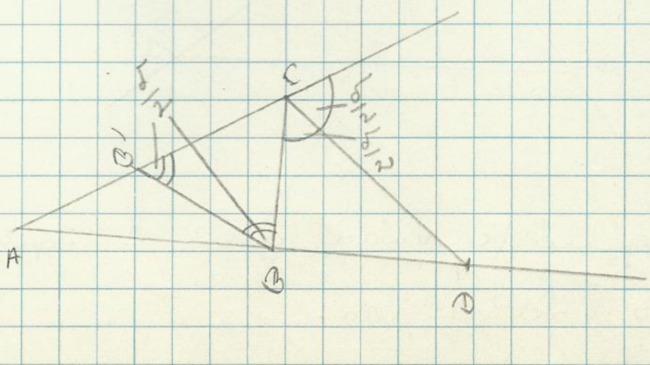
Biz.: $CB = CB'$

A B-nél és B'-nél lévő ∡-ek egyenlőek, mert BCB' Δ egyenlőszárú.

C-nél lévő ∡ külső ∡, egyenlő a 2 nem mellette fekvő belső ∡ összegével, ezért azok is $\frac{\gamma}{2}$-k. Ebből következik, h. a $CD \parallel B'B$. A $\parallel$ szelők tétele miatt

$AD : DB = AC : CB'$, $AD : BD = AC : CB$

Tétel: A Δ külső ∡-felezője a nemközti oldal egyenesét olyan pontban metszi, amelyre teljesül, h. az egyenesen lévő oldal két végpontjától mért távolságának az aránya egyenlő a másik két oldal arányával.



Biz.: Ha a Δ egyenlőszárú, akkor

Feltételem, h. $AC > CB$

Állítás: $AD : BD = AC : CB$

$CB = CB'$

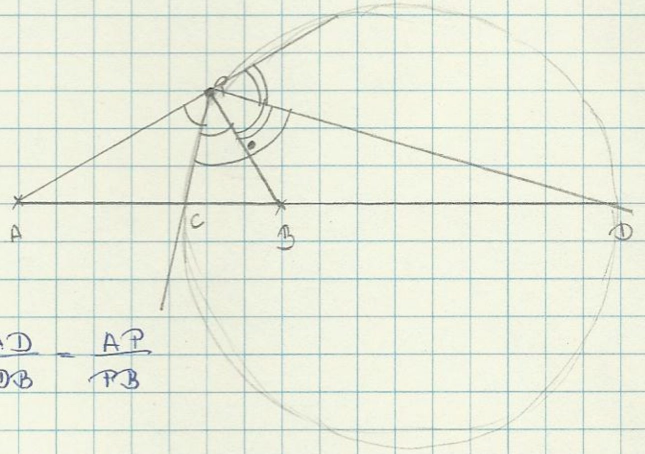
$CD \parallel B'B$

$\Downarrow$

párh. szelők tétele alapján: $AD : BD = AC : CB'$

Tétel: (Apollónius-tétel)

Azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságuk aránya egy egytől különböző állandó, egy kör. Ezt Apollónius körének nevezzük. $\frac{AP}{PB} = m$



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PB}$$

P-nél $\perp$ van, és az Apollónius kör a CD fölötti Thalesz-kör.

geo. gy.

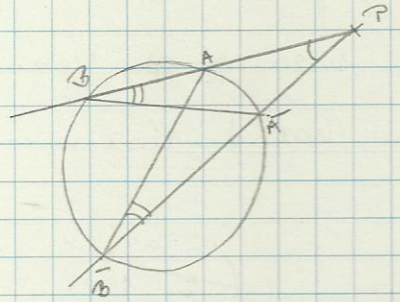
Arányossági tételek a körben

(Tétel: Szelő)

Tétel: Egy körhöz egy adott pontból húzott szelő megfelelő szakaszainak szorzata állandó, csak a körtől és ponttól függő szám.

Biz.:

a,



Állítás: $PA \cdot PB = P\bar{A} \cdot P\bar{B}$

Húzzuk meg: $A\bar{B}$ és $\bar{A}B$ szakaszokat!

$AP\bar{B}\triangle$ és $\bar{A}BP\triangle$

Biz be: $AP\bar{B}\triangle \sim \bar{A}BP\triangle$

$\sphericalangle$ a kerületi $\sphericalangle$-ek tétele miatt $\Rightarrow$ mindkettő az $AP\bar{A}$ ívhez tartozik

$\Downarrow$

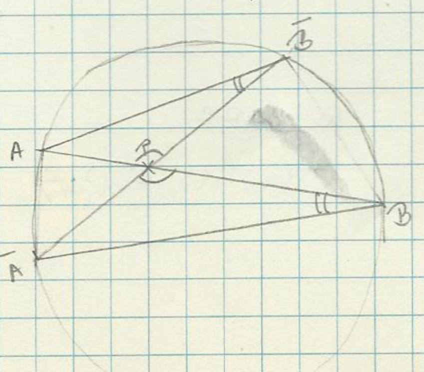
hasonlóak

$\Downarrow$

a megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

$$\frac{PA}{P\bar{A}} \quad \frac{P\bar{B}}{PB} \Rightarrow \underbrace{PA \cdot PB = P\bar{A} \cdot P\bar{B}}_{\text{állítás}}$$

b,



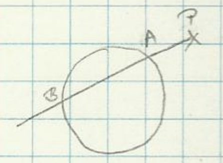
Állítás: $PA \cdot PB = P\bar{A} \cdot P\bar{B}$

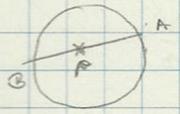
Meghúzzuk: $A\bar{B}$ és $\bar{A}B$ szakaszokat

B.be: $AP\bar{B}A \sim \bar{A}PBA$

$$\frac{PA}{P\bar{A}} = \frac{P\bar{B}}{PB} \Rightarrow \underbrace{PB \cdot PA = P\bar{A} \cdot P\bar{B}}_{\text{állítás}}$$

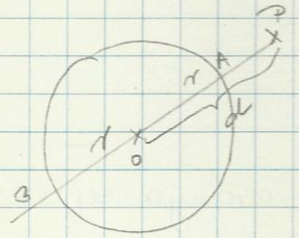
Def.: Ha adott 1 kör és egy pont, akkor a pontból a körhöz húzott szelő szakaszainak szorzatát a pont körre vonatkozó hatványának nevezzük.





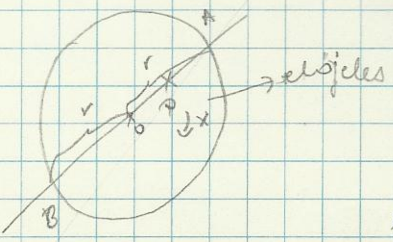
Tétel: Ha adott 1, O középpontú r sugarú kör és 1, az O-tól d távolságra lévő P pont, akkor P-nek a körre vonatkozó n. hatványa: $h = d^2 - r^2$

Biz.:



$h = PA \cdot PB$

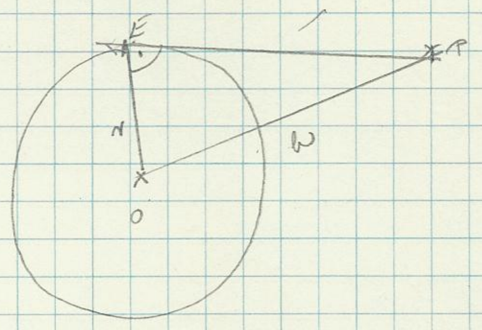
$h = (d-r) \cdot (d+r) = d^2 - r^2$



$h = PA \cdot PB$

$h = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$

Tétel: Egy külső pont körre vonatkozó hatványa egyenlő a kívülről húzott érintőszakasz hosszával



$\Downarrow$

$\llcorner$-ü Δ-ből $\quad \underbrace{\llcorner\Delta: e \cdot e = d^2 - r^2}_{\text{állítás}}$