Kerület- és területszámítás 1. tétel

Sokszögek:

Def.: A sokszög kerülete az oldalai hosszának összege.

Tétel: Egybevágó sokszögek kerülete egyenlő.

BIZ.: az egybevágósági transzformációk megtartják az oldalak hosszát.

Tétel: Hasonló sokszögek kerületének aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

Tétel: (A területfgv létezése): $\exists$ olyan $t: \{\text{sokszögek}\} \to \mathbb{R}^+$ területfgv, mely teljesíti a köv. feltételeket:

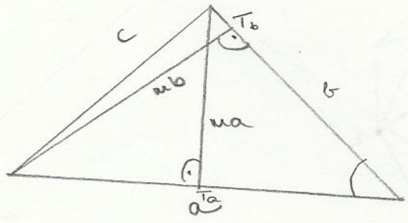
1. A egységnégyzet (egység oldalú négyzet) területe 1.
2. Egybevágó sokszögekhez a fgv ugyanazt a számot rendeli ($\Leftrightarrow$ területük egyenlő)
3. Ha egy sokszöget egy egyenessel két részsokszögre vágunk, akkor a részsokszögek területének összege az eredeti sokszög területét adja.

$\boxed{\text{BIZ.}}$:

I. Δ-ek

1. segédtétel: Egy Δ-ben bármely oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata állandó.

BIZ. (1. st):



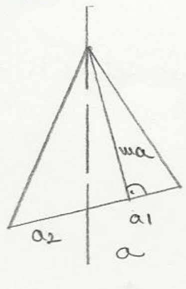
$AT_aC\Delta \overset{\text{hasonlóak}}{\sim} BT_bC\Delta$, mert 2 szögük megegyezik.

$$\frac{m_a}{b} = \frac{m_b}{a} \Rightarrow a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Def.: A t területfgv a Δ-höz valamely oldalának és a hozzá tartozó magasság szorzatának a felét rendeli.

Kérdés: Teljesíti-e a t fgv ($t: \{\Delta\text{-ek}\} \to \mathbb{R}^+$) az 1-3 feladatokat?

1. nincs értelme
2. igaz, mert egybevágósági transzf. után a Δ oldalának és magasságának hossza (és így szorzata) nem változik.
3. igaz, mert

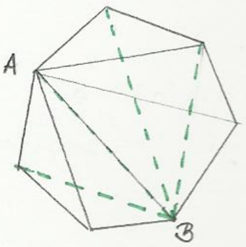


$$\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a_1 \cdot m}{2} + \frac{a_2 \cdot m}{2} = \frac{(a_1+a_2)m}{2}$$

II. Konvex sokszögek:

2. Segédtétel: Egy konvex sokszög valamely csúcsából átlókkal való felbontásában keletkezett Δ-ek területösszege nem függ a csúcs választásától.

Biz (2. st.):

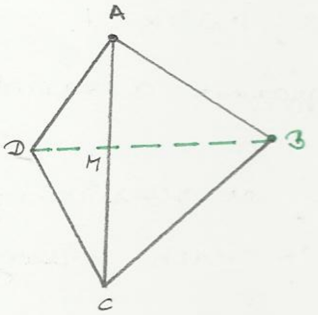


t_A : A-ból induló felbontásban szereplő Δ-ek területösszege.

Kérdés : $t_A \stackrel{?}{=} t_B$

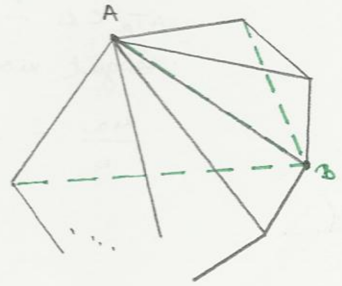
A sokszög csúcsai száma szerinti teljes indukcióval:

$k=4.$



$$t_A = t_{ABC\Delta} + t_{ACD\Delta} = (t_{ABM\Delta} + t_{BMC\Delta}) + (t_{AMD\Delta} + t_{DMC\Delta}) = (t_{ABM\Delta} + t_{AMD\Delta}) + (t_{BMC\Delta} + t_{DMC\Delta}) =$$
$$= t_{ABD\Delta} + t_{BDC\Delta} = t_B$$

k-ra igaz, biz be k+1-re!



AB átló két részre bontja a sokszöget, melyek külön-külön k+1-nél kevesebb csúcsúak.

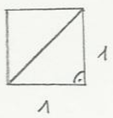
⇓

ezekre igaz az indukciós feltétel ⇒ az összegük is egyenlő, mindegy, h. A-ból vagy B-ből kiindulva bontjuk fel a sokszöget.

Def: A t területfgv konvex sokszöghöz rendelje hozzá valamely csúcsából induló átlókkal történő felosztásában szereplő Δ-ek területeinek összegét.

Kérdés: A konvex sokszögekre definiált t fgv teljesíti-e az 1., 2., 3.-as feltételt?

1., igaz, mert

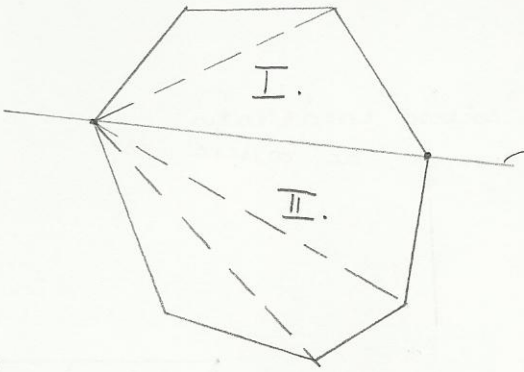


$t_\square = t_\Delta + t_\Delta = \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} = 1$

2., igaz, mert az egybevágósági transzformációk nem változtatják meg a felbontást, a keletkezett Δ-ek területét, és így azok összegét sem.

3., igaz, mert

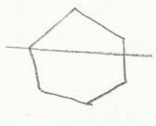
a.,

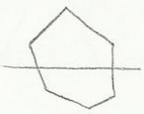


$t_{I.} + t_{II.} = t_{AI.} + t_{AII.} = t_A$

→ átmegy két csúcson

Hasonló módon belátható, hogy a 3., igaz akkor is, ha az egyenes csak egy csúcson megy át, vagy egyen sem.





2. előadás

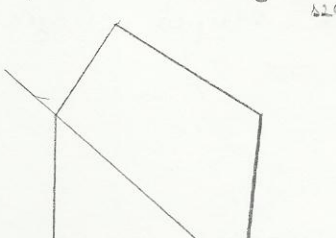
IX. 22.

III. Konkáv sokszögek:

3. Segédtétel: Ha egy sokszöget konvex sokszögekre bontunk, ⇒ a felbontásban szereplő sokszögek területeinek összege független a felbontás módjától.

Biz. (3.st): 1., konvex sokszög (a felbontásban szereplő sokszögek száma szerinti teljes indukcióval)

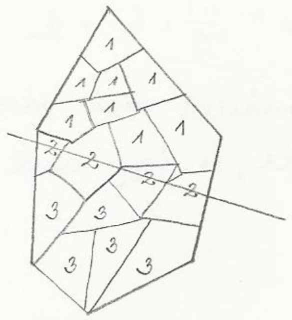
k=2



k = 2-re igaz a II./3 tulajdonság miatt

Tfh.: k-ra igaz

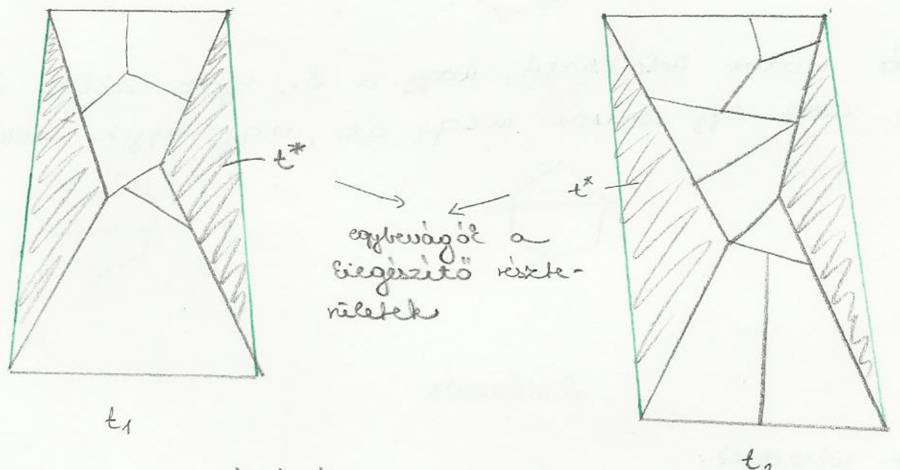
k+1-re:



A két félsokszögben k+1-nél kevesebb sokszög található

A fél-sokszögekre az állítás igaz. ⇒ igaz az egészre is

2; konkáv sokszögek



Konvex sokszögekre igaz az állítás ⇒ $t_1+t^*=t_2+t^*$

$$\Downarrow$$

$$t_1=t_2$$

Def.: konkáv sokszögekhez a t fgv rendelje hozzá a sokszögnek valamely konvex sokszögekre való felbontásában szereplő sokszögek területeinek összegét.

Kérdés: Teljesül-e a 2; és 3; tulajdonság?

2; igaz, mert egybevágó konkáv sokszögeket páronként egybevágó konvex sokszögekre bonthatunk, melyeknek páronként egyenlő a területük, és így azok összege is egyenlő.

3; igaz

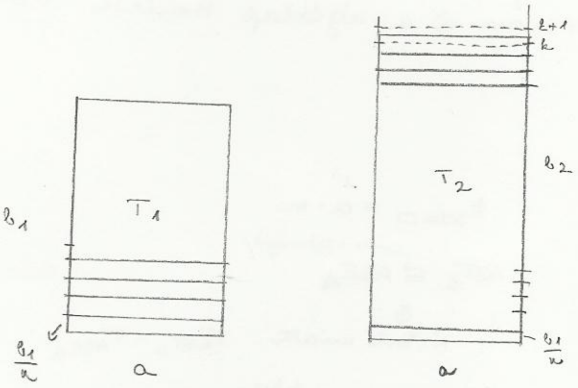
! Vége a területfgv létezésének a bizonyításának !

Tétel: (A területfgv egyértelműsége) **2. tétel**

Ha az 1, 2, és 3. tulajdonság teljesül valamely t fgv-re, akkor az a fgv a háromszöghöz az alap szorozva magasság per kettő ($\frac{a \cdot m}{2}$) rendeli.

BIZ.: Segédtétel: Ha két téglalap egyik oldala egyenlő, akkor területük aránya a másik oldalak arányával egyezik meg.

Biz. (st): (csak 2., és 3. tulajdonságot használhatjuk)



a, Az első téglalap b1 oldalát felosztjuk n részre

b, Felosztjuk a T_2-t is.

- A kis téglalapok egybevágóak $\Rightarrow$ 2. tul. miatt területük egyenlő.
- A 3. tulajdonság miatt a nagy téglalap T_1 területe egyenlő a kis téglalapok területének összegével.

$\Downarrow$

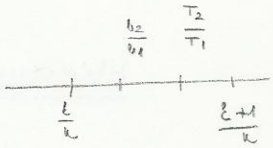
egy kis téglalap területe $\frac{T_1}{n}$

$$k\frac{b_1}{n} \underset{\text{spec. esetben}}{\le} b_2 < (k+1)\frac{b_1}{n} \qquad /:b_1$$

$$k\frac{T_1}{n} \le T_2 < (k+1)\frac{T_1}{n} \qquad /:T_1$$

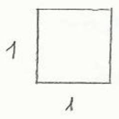
$$\frac{k}{n} \le \frac{b_2}{b_1} < \frac{k+1}{n}$$

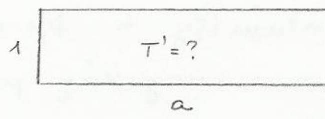
$$\frac{k}{n} \le \frac{T_2}{T_1} < \frac{k+1}{n}$$

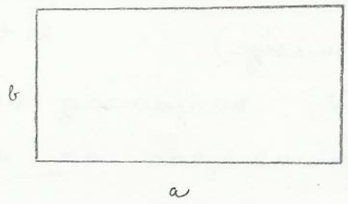


$$\left|\frac{T_2}{T_1} - \frac{b_2}{b_1}\right| < \frac{1}{n} \quad \text{ha } n \to \infty \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

BIZ(st). vége







$T = 1$

st $\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{a}{1}$

$\Downarrow$

$\frac{T'}{1} = \frac{a}{1}$

$\underline{T' = a}$

$T'' = ?$

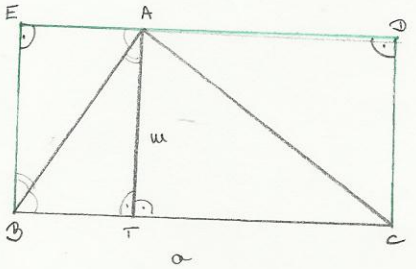
st $\Rightarrow \frac{T''}{T'} = \frac{b}{1}$

$\Downarrow$

$\frac{T''}{a} = \frac{b}{1}$

$\underline{T'' = ab}$

Tehát beláttuk, h. 1; 2; és 3. tulajdonság $\Rightarrow$ a téglalap területe szomszédos oldalainak szorzata.



$t_{BCDE\square} = a \cdot m$

$ABT_\triangle \overset{\text{egybevágó}}{\cong} ABE_\triangle$

$\Downarrow$

2. tul miatt $T_{ABT\triangle} = T_{ABE\triangle}$

$ATC_\triangle \cong ADC_\triangle \overset{2. tul.}{\Rightarrow} T_{ATC\triangle} = T_{ADC\triangle}$

3. tul $\Rightarrow T_{BCDE\square} = T_{ABT\triangle} + T_{ABE\triangle} + T_{ATC\triangle} + T_{ADC\triangle}$

$\Downarrow$

$T_{BCDE\square} = 2(T_{ABT\triangle} + T_{ATC\triangle})$

$T_{BCDE\square} = 2T_{ABC\triangle}$

$\Downarrow$

$a \cdot m = 2T_{ABC\triangle}$

$\frac{a \cdot m}{2} = T_{ABC\triangle}$

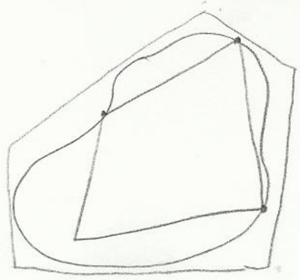
IX.29.

3. előadás

Síkidomok területe

Def.: A sík korlátos zárt részhalmazát síkidomnak nevezzük.

Def.: Egy sokszög a síkidom beírt sokszöge, ha minden pontja a síkidom belső ill. határpontja. Körülírt sokszög, ha a síkidom minden pontja a sokszög belső ill. határpontja.



Def.: A síkidom belső Jordan-mértékén a beírt sokszögek területei halmazának pontos felső korlátját értjük, azaz:

$t_j := \overline{\lim}\ \{t\{\text{beírt sokszög}\}\}$ → beírt sokszögek pontos felső korlátja

a terület valós szám ⇒ van pontos felső korlátja, mert a halmaz ($\mathbb{R}$) felülről korlátos.

Def.: A síkidom külső Jordan-mértékén a köréírt sokszögek területei halmazának pontos alsó korlátját értjük, azaz:

$T_j := \{t\{\text{külső sokszögek}\}\}$ és a halmaz alulról korlátos.

Def.: Ha a síkidom belső és külső Jordan-mértéke megegyezik ⇒ azt mondjuk, hogy a síkidom Jordan-mérhető (van területe) és területe ez a közös érték.

$t_{\text{síkidom}} = T_j = t_j$.

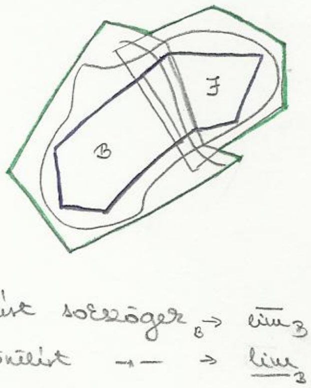
Mj.: Ha a külső és belső Jordan-mérték nem egyezik meg, akkor a síkidom Jordan-szerint nem mérhető, azaz nincs területe ebben a megközelítésben. (Ez nem azt jelenti, h. sehogy nem lehet számot rendelni, csak Jordan szerint nincs, de lehet, h. máshogy (Lebesgue) szerint van.)

Tétel: Ha egy síkidomnak van területe, akkor a vele egybevágó síkidomnak is van területe (Jordan-mértéke) és ezek megegyeznek.

BIZ.: Az egybevágó síkidomokban páronként egybevágó sokszögeket írhatunk, melyeknek a területe megegyezik ⇒ a két beírt sokszöghalmaz területeinek pontos felső korlátja is megegyezik.

Tétel: Ha egy síkidomot két részre vágunk, és a részsíkidomoknak ∃ területük ⇒ az eredeti síkidomnak is ∃ területe, és ez a részek területének összege.

Magy.:



Unióját vesszük a 2 beírt sokszögnek.
Metszetét kell venni a 2 köréírt sokszögnek.

B: beírt sokszögek$_B$ ⇒ $\overline{\lim}_B$ pontos felső korlátjuk $\Big\}_{=t_B}$ egyenlőek, mert ∃ terület
köréírt — " — ⇒ $\underline{\lim}_B$ pontos alsó — " —

J: beírt sokszögek$_J$ ⇒ $\overline{\lim}_J$ $\Big\}_{=t_J}$ egyenlőek
köréírt — " — ⇒ $\underline{\lim}_J$

beírt sokszögek$_B$ + beírt sokszögek$_J$ $\to t_B + t_J$

körülírt –"– + körülírt –"– $\to t_B + t_J$

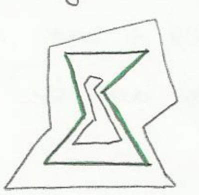
beírt sokszögek$_{B+J}$ $\leq$ beírt sokszögek$_E$ $\leq$ körülírt sokszögek$_E$ $\leq$ körülírt sokszögek$_{B+J}$

eredeti síkidom

$t_B + t_J$

Tétel: A sokszögek, mint síkidomok Jordan-mértéke megegyezik a területfgv. által hozzájuk rendelt értékkel.

BIZ.: A sokszögnek önmaga beírt és körülírt sokszöge is.



Mint beírt sokszög, ő maga a legnagyobb területű $\Rightarrow$

$t_{sokszög} = t^{belső}_{Jordan}$

Mint körülírt sokszög, ő a legkisebb területű $\Rightarrow$

$t_{sokszög} = T^{külső}_{Jordan}$

$\Downarrow$

$t_J = T_J = t_{sokszög}$

X.G.

4. előadás

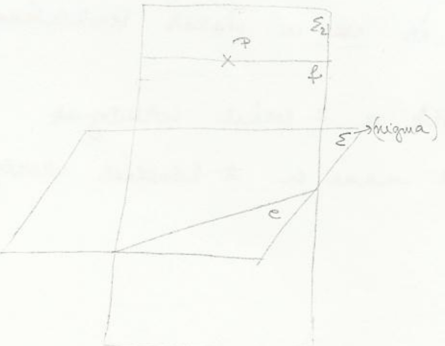
Párhuzamosság és merőlegesség a térben

3. tétel

Def.: Két sík ill. egy sík és egy egyenes párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

Tétel: Egy síkkal egy adott ponton keresztül végtelen sok párhuzamos egyenes húzható.

Biz.:



1, felveszünk a síkon a tetszőleges e egyenest

$e \subset \Sigma$ tetszőleges

2, e és P $\Rightarrow \Sigma_2$

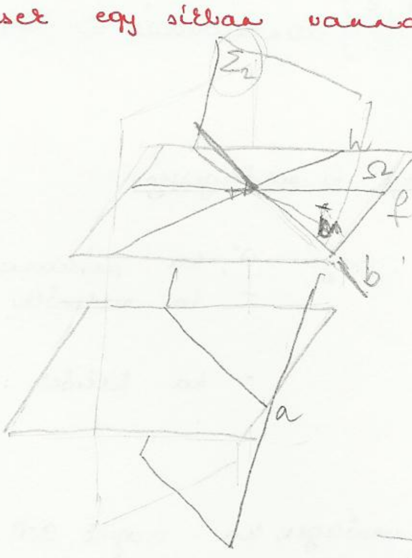
$f \ni P$ $f \parallel e$

Tfh. $f \nparallel \Sigma \Rightarrow \exists$ közös pontjuk: $M = f \cap \Sigma$

de $M \in e$ kellene $\Rightarrow$ ellentmondás $\Rightarrow f \parallel \Sigma$

Mivel e tetszőleges egyenes volt, e-vel nem egyező irányú Σ-beli egyenesek más-más $\parallel$ egyenest eredményeznek P-n keresztül. Σ-ban végtelen sok egyenes irány van $\Rightarrow$ végtelen sok $\parallel$ egyenes van

Tétel: Egy síkkal $\parallel$ adott pontra illeszkedő egyenesek egy síkban vannak.



BIZ.:

$\left.\begin{array}{l} f \parallel \Sigma \\ h \parallel \Sigma \end{array}\right\}$ f és h síkja: Ω

$b \parallel \Sigma$

kérdés: $b \subset \Omega$?

Σ_2 : a és P síkja $\Rightarrow b \subset \Sigma_2$

$a \parallel b$

Tfh: $b \not\subset \Omega$, csak $b \cap \Omega = P$ → metsző helyzetűek

$\Sigma_2 \cap \Omega = m$ egyenes

Tudjuk, h $\underbrace{a \parallel b \quad \text{de} \quad a \parallel m}_{\Sigma_2 \text{ síkban vannak}}$

$a \parallel m \quad a \parallel b$

a-val a P-n keresztül két $\parallel$ egyenes b és m. ↯
ellentmondás a párhuzamossági axiómával. $\Rightarrow$
$b = m$ egyenes $\rightarrow b \subset \Omega$.

$\Downarrow$

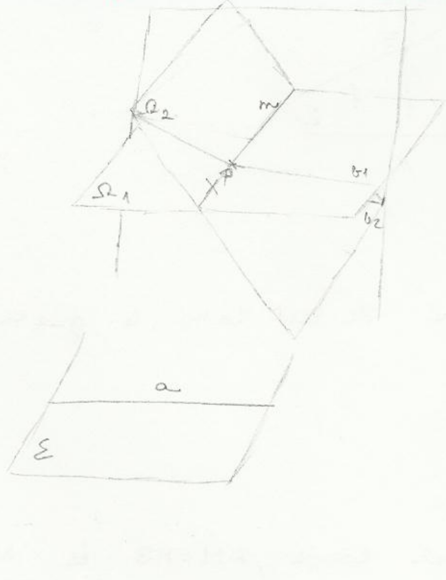
Σ-val $\parallel$ egyenesek mind egy síkban, Ω-ban vannak.

Köv.: Egy síkkal egy adott ponton keresztül húzható $\parallel$ sík.

BIZ.: a Σ síkkal az Ω párhuzamos.

Tétel: Egy síkkal egy adott ponton keresztül csak egy $\parallel$ sík húzható.

BIZ.:



Tfh: $\Omega_1 \parallel \Sigma$
$\Omega_2 \parallel \Sigma$

$a \in \Sigma$ merőleges és $\nparallel$ a metszésvonallal

$b_1 \parallel a \quad b_1 \subset \Omega_1$

$b_2 \parallel a \quad b_2 \subset \Omega_2$

Σ_2-ben $a \parallel b_1, b_2$; $P \to b_1, b_2$ } ellentmondás $\Rightarrow \Sigma_1 = \Sigma_2$

Térelemek szöge és merőlegesség:

Def.: Két egyenes szöge:
- ha párhuzamosak: 0°
- ha metszők: a metszéspont körül keletkezett két szögpár közül a nem nagyobb.
- ha kitérők: húzunk a két egyenessel párhuzamos egyenest a tér egy tetszőleges pontján keresztül. E két egyenes szöge a két eredeti egyenes szöge.

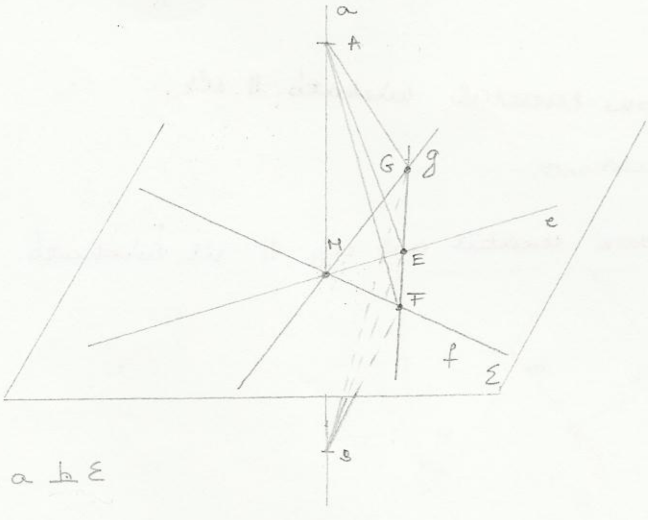
Def.: Két egyenes merőleges, ha szögük 90°.

Def.: Két sík szöge:
- ha párhuzamosak: 0°
- ha metszők: a metszésvonal egy tetszőleges pontjában merőlegest állítunk a metszésvonalra mindkét síkban. E két egyenes szöge legyen két sík szöge.

Def.: Két sík merőleges, ha szögük 90°.

Def.: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére.

Tétel: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík két metsző egyenesére.



$\left.\begin{array}{l} a \perp e \\ a \perp f \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} a \perp \Sigma$

Vegyünk egy tetszőleges g egyenest. Be kell látni, h. $g \perp a$

$AM = MB$

g tetszőleges

Tudjuk: $AME\sphericalangle = AMF\sphericalangle = 90°$.

$AME\triangle \cong BME\triangle$, mert ME oldaluk közös, $AM = MB$ és $AME\sphericalangle = BME\sphericalangle$ $(=90°)$ $\Rightarrow$

$AE = BE$

hasonlóan: $AMF\triangle \cong BMF\triangle \Rightarrow AF = BF$

$$\left.\begin{array}{l} AE = BE \\ AF = BF \\ F \text{ közös} \end{array}\right\} AFE\triangle \cong BFE\triangle \Rightarrow AEF\sphericalangle = BEF\sphericalangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AEG\sphericalangle = BEG\sphericalangle \\ AE = BE \\ EG \text{ oldal közös} \end{array}\right\} AEG\triangle \cong BEG\triangle \Rightarrow$$

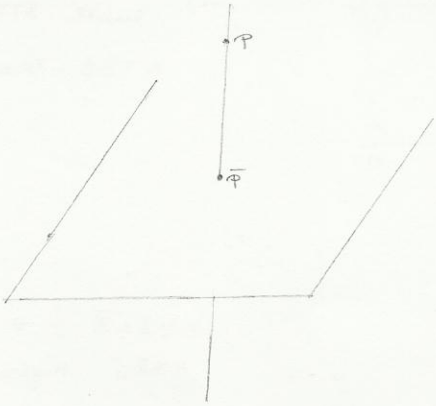
$$\Rightarrow AG = BG$$

$$\left.\begin{array}{l} AG = BG \\ AM = BM \\ MG \text{ oldal közös} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow AMG\triangle \cong BMG\triangle \Rightarrow AMG\sphericalangle = BMG\sphericalangle \\ \text{de } AMG\sphericalangle + BMG\sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow AMG\sphericalangle = 90^\circ = \underline{\underline{a \perp b}}. \end{array}$$

5. előadás

X. 13.

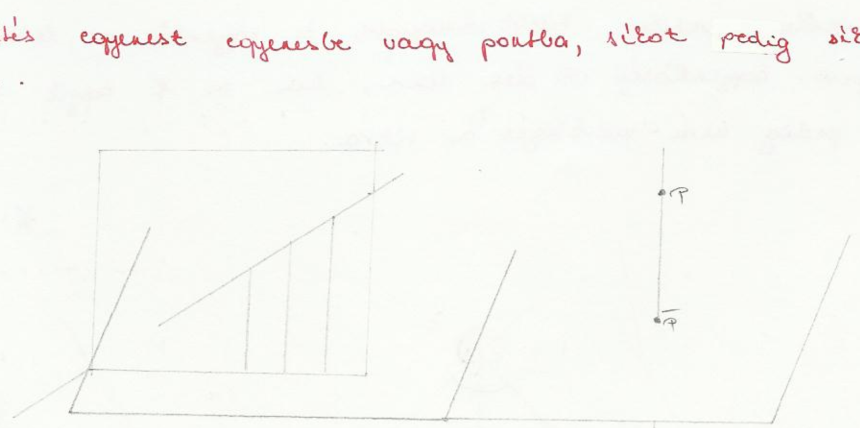
Def: A merőleges vetítés a teret a síkra képezi le oly módon, hogy a térbeli P ponthoz a P-ből a síkra állított merőleges egyenes talppontját rendeli.

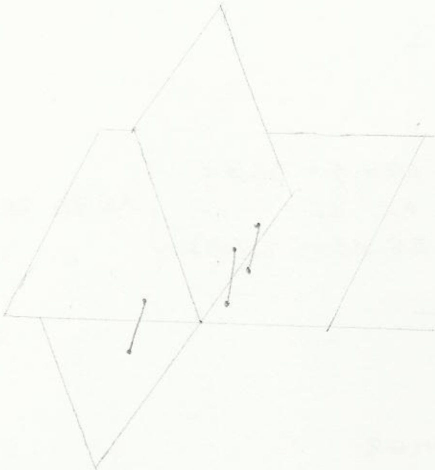


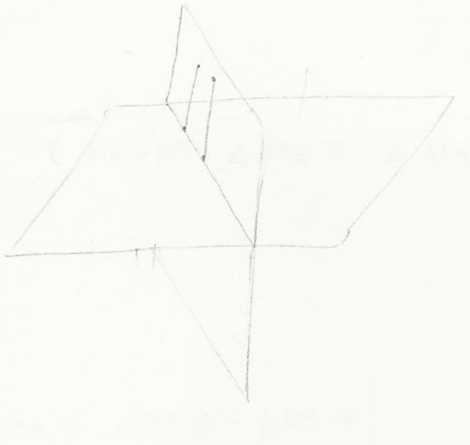
Megj.: Nem kölcsönösen egyértelmű, csak egyértelmű. (P-nek egyértelmű, hogy $\bar{P}$ a képe, de fordítva nem igaz, hiszen az egyenes bármely pontja lehetne a P.)

Tétel: A merőleges vetítés egyenest egyenesbe vagy pontba, síkot pedig síkba vagy egyenesbe visz át.

BIZ.:

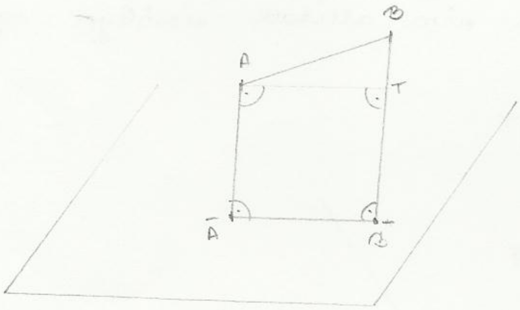






Tétel: Szakasz merőleges vetületének a hossza kisebb vagy egyenlő az eredeti szakasz hosszához képest. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a szakasz $\parallel$ a síkkal.

BIZ.: Tfh. $AB \nparallel$ sík

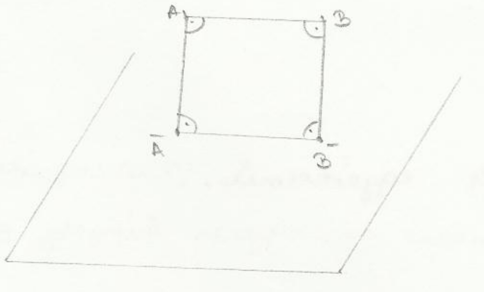


$AT = \bar{A}\bar{B}$

mivel $ATB\sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow$

$ATB\triangle$-ben $\underline{\underline{AB}} > AT = \underline{\underline{\bar{A}\bar{B}}}$

$AB \parallel$ sík

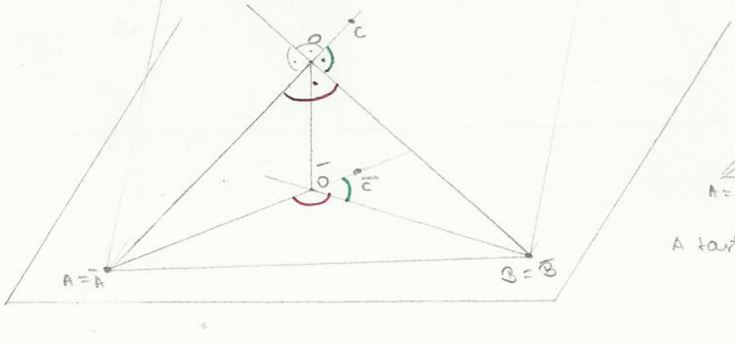


$AB \parallel \bar{A}\bar{B}$ és $\forall$ szög derékszög $\Rightarrow$

$AB\bar{A}\bar{B}$ téglalap $\Rightarrow AB = \bar{A}\bar{B}$

Tétel: Derékszög merőleges vetülete kisebb, nagyobb és egyenlő is lehet az eredeti $\sphericalangle$-höz képest. Egyenlőség $\Leftrightarrow$ áll fenn, ha a $\sphericalangle$ egyik szára $\parallel$ a síkkal, a másik pedig nem merőleges a síkra.

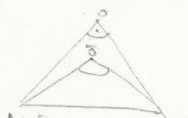
BIZ.: a)



$\sphericalangle$:

$AOB\sphericalangle \rightarrow \bar{A}\bar{O}\bar{B}\sphericalangle$

$\left.\begin{array}{l} OA > \bar{O}\bar{A} \\ OB > \bar{O}\bar{B} \end{array}\right\}$



$\Rightarrow \bar{A}\bar{O}\bar{B}\sphericalangle > AOB\sphericalangle$

A tart. háromszög szöge nagyobb.