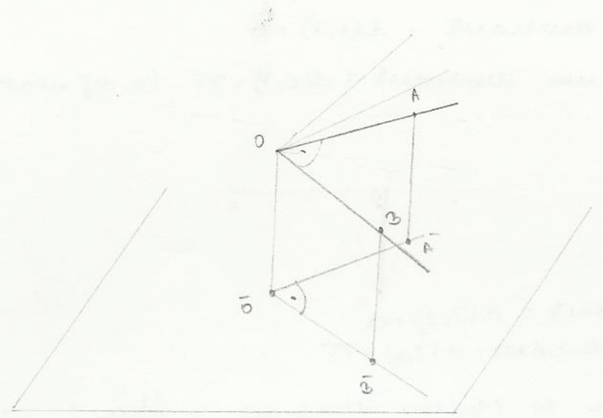
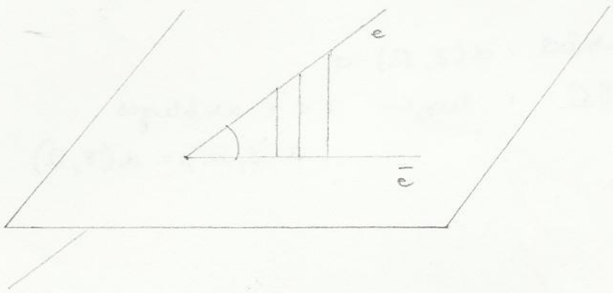
$\sphericalangle$ : $BOC\sphericalangle > \bar{B}\bar{O}\bar{C}\sphericalangle$

B.)

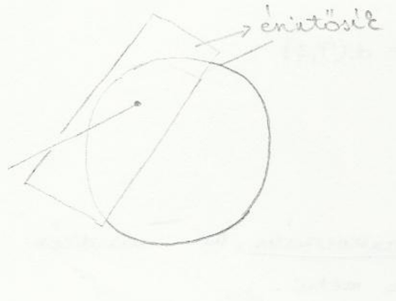


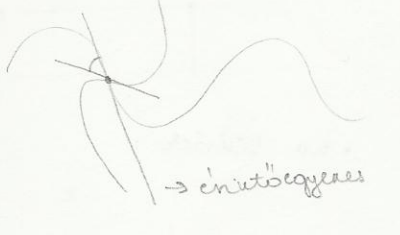

Def: Ha egy egyenes nem merőleges a síkra, akkor $\sphericalangle$-üt legyen az egyenesnek és az egyenes síkra eső merőleges vetületének a szöge.




Megj: Általában két alakzat szögét a metszéspontban az ottani érintő egyenes ill. érintősík szögével mérhetjük.

Pl.:




## Távolságfeladatok

Def: Két ponthalmaz távolsága a halmazok egyes ~~pontjainak~~ pontpárjainak távolságából álló valós számhalmaz pontos alsó korlátja.

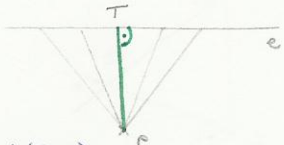
Mj: Ha a két ponthalmaznak $\exists$ közös pontja, távolságuk 0.

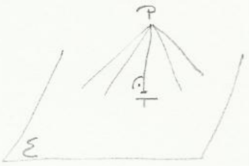
nyílt körlapok nem érintik egymást, de ha zártak lennének, lenne 1 közös pontjuk, a távolság mégis 0.

- két pont távolsága: szakaszmérés axiómája
- pont-egyenes távolsága: • ha illeszkedik: $d(e,P)=0$

  P      e

  • ha nem illeszkedik: $d(e,P)=PT$ (a def. miatt)




- pont-sík távolsága: • ha illeszkedik: $d(P,\Sigma)=0$
  • ha nem illeszkedik: $d(P,\Sigma)=PT$
- egyenes-sík távolsága: • ha az egyenes illeszkedik a síkra

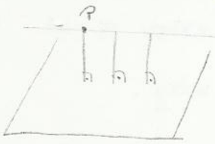
  e      Σ

  -"- metsző a síkkal

  $\left.\right\}\ d(e,\Sigma)=0$

  • ha párhuzamosak ($e \parallel \Sigma$)    legyen $P \in e$ tetszőleges

  $d(e,\Sigma) := d(P,\Sigma)$

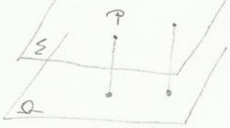



- sík-sík távolsága: - ha metszők: $d(\Sigma,\Omega)=0$

  Σ      Ω

  - ha $\Sigma \parallel \Omega$: legyen $P \subset \Sigma$ tetszőleges

  $d(\Sigma,\Omega) := d(P,\Omega)$

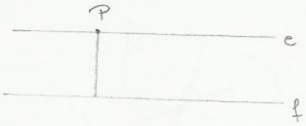



- egyenes-egyenes távolsága: • ha metszők: $d(e,f)=0$

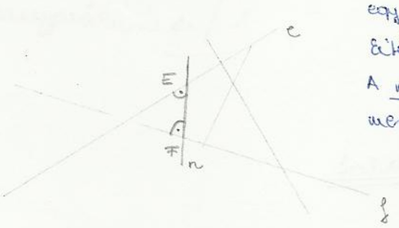
  e      f

  • ha $e \parallel f$: legyen $P \in e$ tetszőleges

  $d(e,f) := d(P,f)$




• ha kitérők:




egy egyenes transzverzális, ha mindkét kitérő egyenest metszi. A normál transzverzális (n) mindkét egyenesre merőleges.

A két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzálisnak a két egyenes közé eső szakaszának a hossza.

$d(e,f) := d(E,F)$

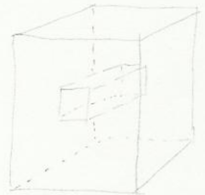
# Poliéderek 4. tétel

Def.: Azt a véges sok sokszög által határolt térrészt, mely nem tartalmaz egyenest, poliédernek nevezzük.

Def.: Egy poliéder (test) összefüggő, ha bármely két pontját össze tudjuk kötni a poliéderen belül haladó törött vonallal.

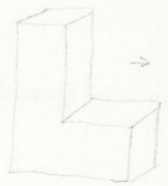
Def.: Egy összefüggő poliéder közönséges, ha minden csúcsában az oda befutó élek egyértelműen sorbarendezhetők.

Def.: Egy poliéderfelület $n$-szeresen összefüggő, ha bármely $n$ db, egymáshoz kapcsolódó zárt élfolyam két részre osztja, de $(n-1)$ darab ilyen élfolyam nincs. (élfolyamra nem igaz)



→ nem egyszerű

Def.: Egy poliéder egyszerű, ha közönséges, és felülete egyszeresen összefüggő.



→ egyszerű

Tétel: Ha egy poliéder konvex, akkor egyszerű.

Mj.: Az egyszerű poliéder a gömbbel homeomorf.

Át lehet alakítani folytonos alakítgatással gömbbé. (Nem kell vágni ... stb)

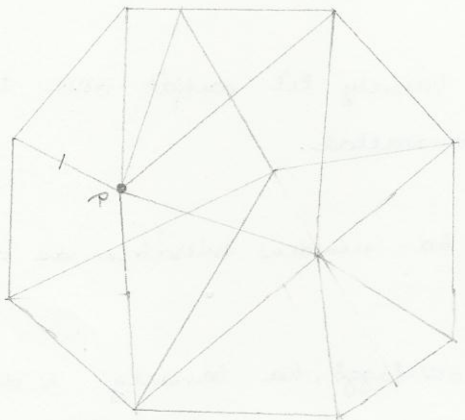
Tétel: (Euler) Ha egy egyszerű poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek száma $cs$, $l$ és $é$, akkor.

$$cs - é + l = 2.$$

BIZ: Konvex esete:

1.) a poliédert levetítjük egy síkra úgy, hogy a vetítés iránya nem párhuzamos egyetlen lappal és éllel sem.

kettős vetület ($\forall$ belső pont két poliéderfelületi pont vetülete)




cs - é + l összeget vizsgáljuk

a) keresünk egy belső csúcspontot

- elhagyunk egy P-ből induló élt:

  az élek száma eggyel csökkent, a lapok száma is eggyel csökkent $\Rightarrow$

  cs - é + l összeg nem változik.

b) elhagyjuk sorban a P-ből kiinduló éleket.

- amikor az utolsó élt hagyjuk el: $\left.\begin{array}{l} é := é - 1 \\ cs := cs - 1 \\ l = l \end{array}\right\}$ cs - é + l nem változik

c) a).-t és b).-t elvégezzük az összes belső csúcsra.

$\rightarrow$ ennyi maradt az elhagyások után

cs - é + l nem változott

d) lapok száma 2, mert kettős vetület

a kontúrsokszögben a csúcsok száma egyenlő az élek számával.

~~cs - é~~ + l = 2.

**Tétel: (Poincaré):** n-szeresen összefüggő poliéderekre

$$cs - é + l = 3 - n$$

(Euler tétel esetében $n = 1$.)

**Def.:** Egy poliéder szabályos, ha oldalai szabályos egybevágó sokszögek, és minden lapszöge egyenlő.

**Tétel: (Platon)** 5 szabályos poliéder van.

BIZ: ~ Minden szabályos poliéder konvex kell, hogy legyen.
~ $\forall$ csúcsba legalább 3 lap fut össze.
~ az egy csúcsba futó lapok csúcsnál lévő szögeinek összege kisebb kell, hogy legyen, mint 360°. (360° sem lehet, mert akkor sík lenne.)

1) szabályos $\Delta$-ek az oldalak:


$\alpha = 60°$

egy csúcsba összefuthat $3\Delta$, $4\Delta$ v. $5\Delta$.

2) 

az oldalak: $\alpha = 90°$

egy csúcsba 3□ futhat össze.

3) 

oldalak: $\alpha = 108°$

egy csúcsba pontosan 3 ⬠ futhat össze.

4) 

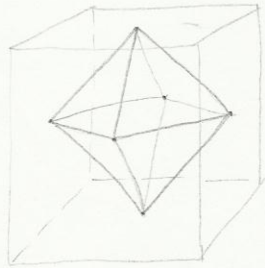
oldalak $\alpha = 120°$ $\Rightarrow$ nincs ilyen szabályos poliéder

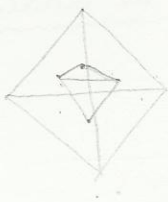
5) szabályos n-szögből, ha $n \geq 6$ nem építhetünk szabályos poliédert.

Az öt lehetőséget valóban meg lehet konstruálni:

Megjegyzés: szabályos poliéderek :

| oldal | | | cs | é | l |
|---|---|---|---|---|---|
| 3△ | tetraéder | önmaga duálisa | 4 | 6 | 4 |
| 4△ | oktaéder | egymás duálisai | 6 | 12 | 8 |
| 5△ | ikozaéder | | 12 | 30 | 20 |
| 3□ | hexaéder (kocka) | | 8 | 12 | 6 |
| 3 ⬠ | dodekaéder | | 20 | 30 | 12 |





(Megj:)

Def.: Egy egydimenziós alakzat szabályos, ha szabályos egybevágó $(n-1)$ dimenziós alakzatból áll, és csak szöge egyenlő. $(n \geq 2)$

Pl.: $n=2$: szabályos sokszögek
$n=3$: szabályos poliéderek (Platóni testek)
$n \geq 4$: szabályos cellák

Tétel: A szabályos alakzatok száma: $n=2$-re $\infty$
$n=3$-ra 5
$n=4$-re 6
$n \geq 5$-re 3

# 7. előadás

## Másodrendű felületek 5. tétel

**Def.:** Egy alakzat n-edrendű, ha pontjai egy olyan polinomiális egyenletet elégítenek ki, mely n-edfokú.

**Példa:** $Ax+By+C=0$ elsőrendű alakzat (egyenes egyenlete)

$x^2+y^2-r^2=0$ (origó sugarú r középpontú kör egyenlete) másodrendű alakzat

$3x^5-4xy^4+3x-7=0$ ötödrendű alakzat

**Tétel:** (Bézout [bézu]): egy n-edrendű és egy m-edrendű felület metszési alakzata $(n \cdot m)$-edrendű görbe.

BIZ.: n-edrendű felület ⇒ n-edfokú polinom $=0$.

m-edrendű felület ⇒ m-edfokú polinom $=0$.

a metszésgörbe pontjai mindkét egyenletet kielégítik

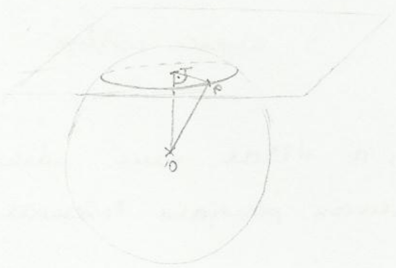
behelyettesítés után $(n \cdot m)$-edfokú polinom $=0$ egyenletet kapunk ⇒

⇒ $(n \cdot m)$-edrendű görbe

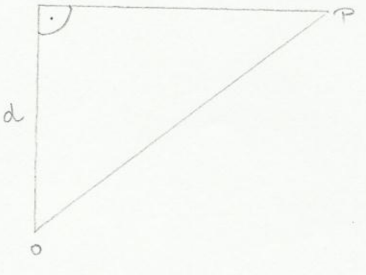
**Köv:** Másodrendű felület valamennyi síkmetszete másodrendű görbe.

**Tétel:** A gömb minden olyan síkmetszete, amikor a síknak és a gömbnek ∃ közös pontja, kör.

BIZ:




- P tetszőleges pontja a síkmetszetnek
- O-ból ⊥-t állítunk a síkra. Ennek a talppontja a T.
- OTP△ derékszögű (ha egy egyenes ⊥ egy síkra, minden egyenesére ⊥)




$$\left.\begin{array}{l} OT = d \text{ távolság független P-től} \\ OP = \text{a gömb sugara, független P-től} \end{array}\right\}$$

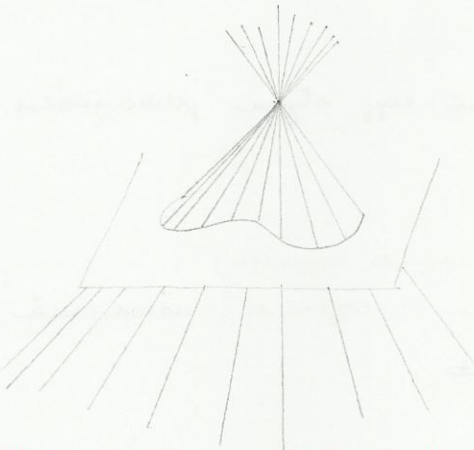
⇓

$TP = \sqrt{OP^2 - OT^2}$ → független P-től

⇓

P a T pont körüli TP sugarú körön van rajta

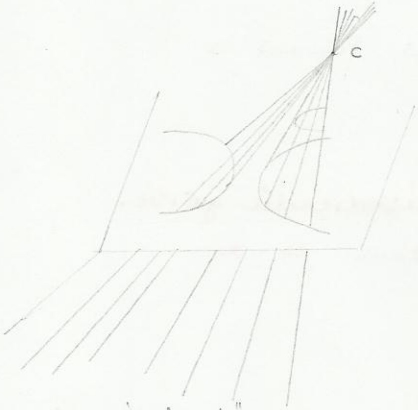
Def.: Ha adott egy síkbeli ponthalmaz és egy, a síkra nem illeszkedő C pont, akkor a C-t a ponthalmaz pontjaival összekötő egyeneset kúpfelületet alkotnak.



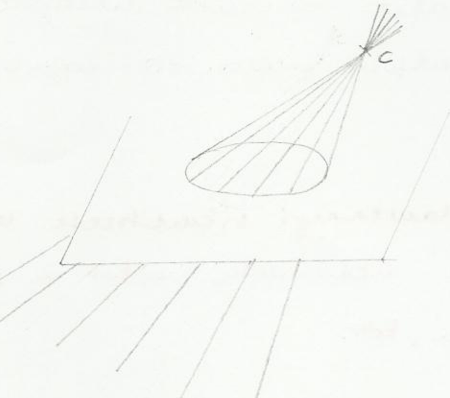
Tétel: Ha a kúpfelület definiáló ponthalmaza másodrendű görbe, akkor a kúp másodrendű felület.

Def.: Ha a definiáló ponthalmaz kör, akkor a kúpfelületet körkúpnak nevezzük.

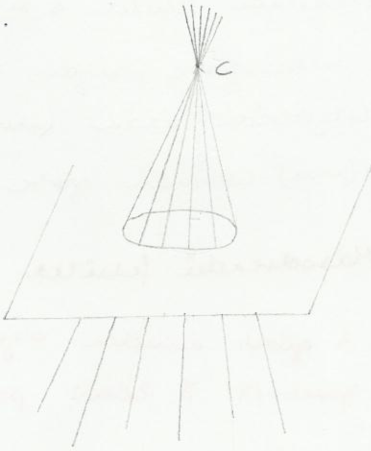
Def.: Ha a körkúp olyan, hogy C merőleges vetülete a kör síkjára éppen a kör középpontja, akkor egyenes körkúpnak nevezzük.




másodrendű hiperbola alapú kúp

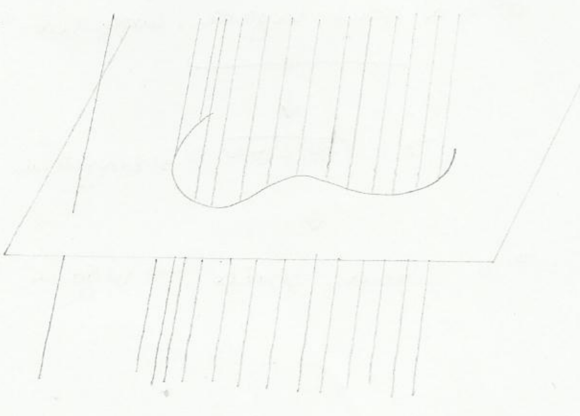



körkúp




egyenes körkúp

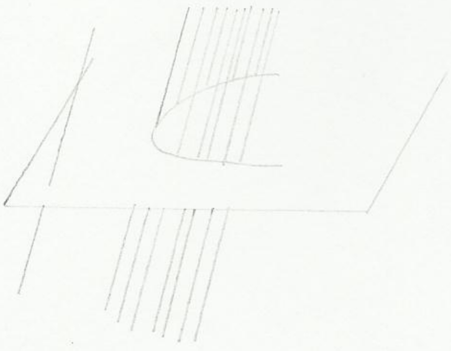
Def.: Ha adott egy síkon egy ponthalmaz, és egy, a síkkal nem párhuzamos egyenes, akkor az adott egyenessel a ponthalmaz pontjain keresztül párhuzamosokat húzva, hengerfelületet kapunk.



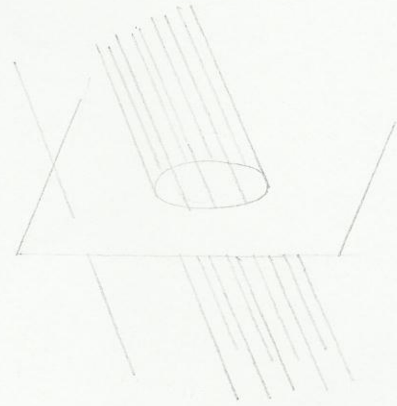
Tétel: Ha a henger definiáló ponthalmaz másodrendű görbe, akkor a felület másodrendű hengerfelület.

Definíció: Ha a definiáló görbe kör, akkor a henger körhengernek nevezzük.

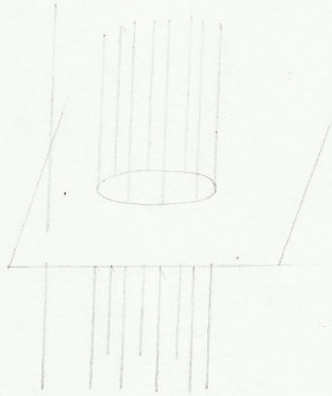
Def.: Ha a körhenger definiáló egyenese merőleges a síkra, akkor a hengert egyenes körhengernek nevezzük.



másodrendű
parabolikus henger



körhenger

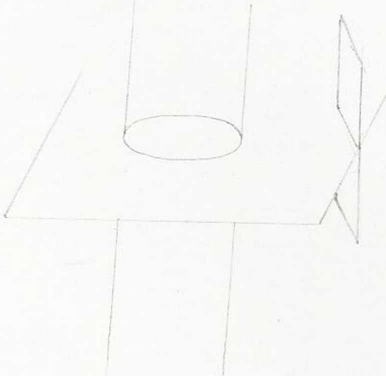


egyenes körhenger

## Egyenes körhenger síkmetszetei: 6. tétel

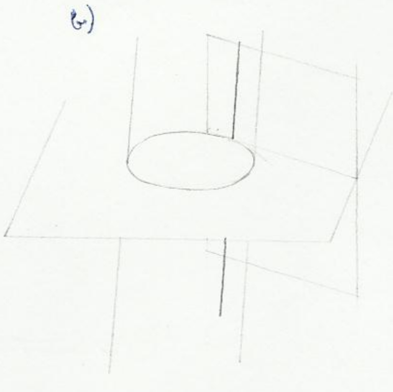
1) A metsző sík párhuzamos a definiáló egyenessel.

a)



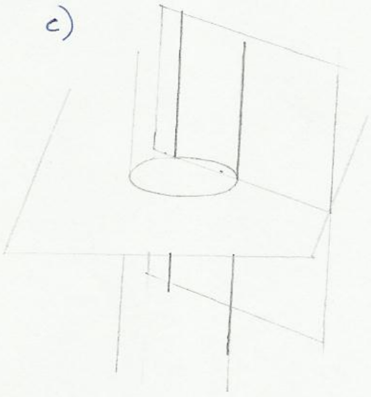
metszet: képzetes || egyenespár

b)



egybeeső egyenespár

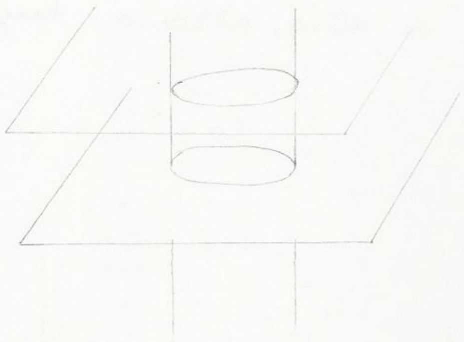
c)



párhuzamos egyenespár

2) metsző sík nem $\parallel$ a definiáló egyenessel

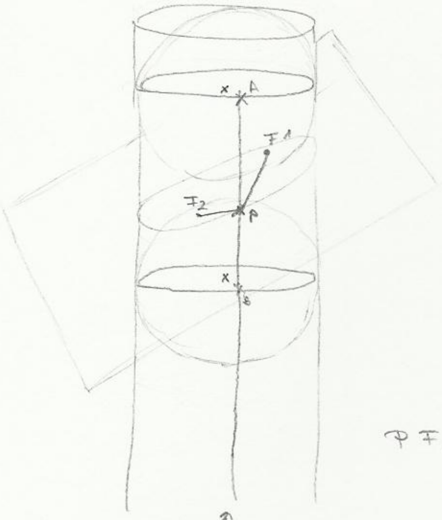
a) a metsző sík $\perp$ az egyenesre



a metszet kör
(a definiáló körrel egyező sugarú)

3) A metsző sík nem ∥ és nem merőleges az alkotókra

→ gömböket a hír. matematikusról (Dandelön): Dandelin-gömbök




henger alkotó

PA és PF1 érintőszakaszok a felső gömbhöz

$\Downarrow$

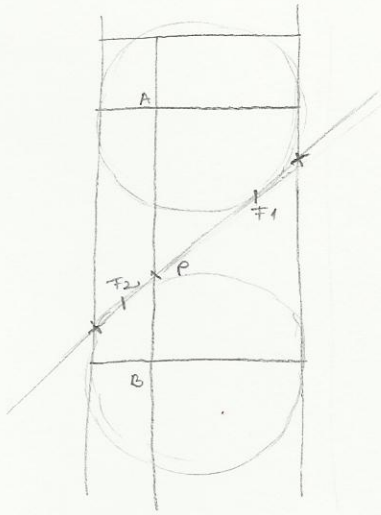
$PA = PF_1$

PB és $PF_2$ érintőszakaszok az alsó gömbhöz

$\Downarrow$

$PB = PF_2$

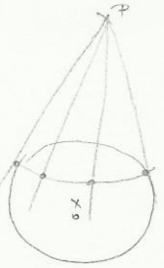
$$PF_1 + PF_2 = \underbrace{PA + PB}_{AB}$$




$PF_1 + PF_2 = AB \Rightarrow PF_1 + PF_2 =$ állandó

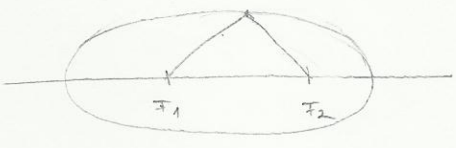
$\Rightarrow$ P pont ellipszist ír le $F_1$ és $F_2$ fókuszokkal

* Megj:




Egy gömbhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőek.

Ellipszis def: ha adott pont $f_1$ és $f_2$ és egy a két pont távolságánál nagyobb távolság ⇒ azon pontok mértani helyét a síkon, melyeknek az $f_1$ és $f_2$-től mért távolságuk összege, az adott távolság, ellipszisnek nevezzük.
→ $f_1$ és $f_2$ neve fókusz.




$F_1P + F_2P =$ állandó (ami előre meg van adva.)