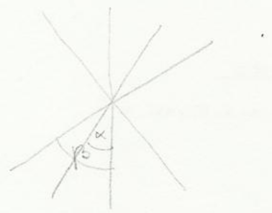
Egyenes körkúp síkmetszetei 7. tétel

1) A metsző sík illeszkedik a kúp csúcspontjára:
Legyen a kúp félnyílásszöge α, a kúp tengelyének és a metsző síknak a szöge β.

a) $0° \leq \beta < \alpha$

b) $\alpha = \beta$

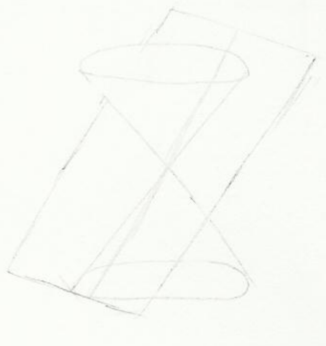
c) $\alpha < \beta < 90°$



a)

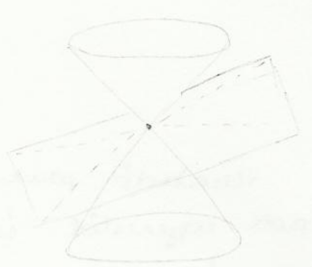
metsző egyenespár

b)



egybeeső egyenespár

c)



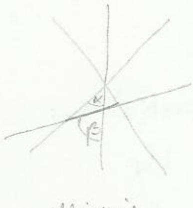
képzetes metsző egyenespár

2) A metsző sík nem illeszkedik a kúp csúcsára

a) $\beta = 90°$

kör

b) $\alpha < \beta < 90°$



ellipszis
(∅ alkotóval ||)

c) $\alpha = \beta$

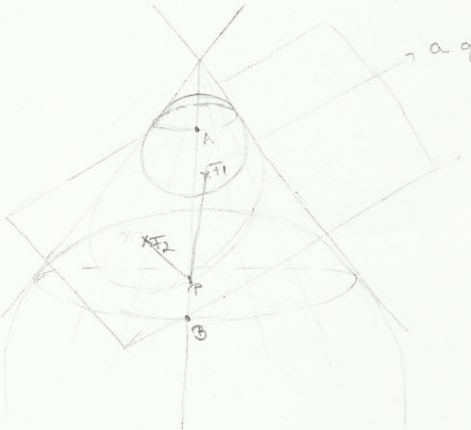
parabola
(1 alkotóval ||)

d) $0 < \beta < \alpha$

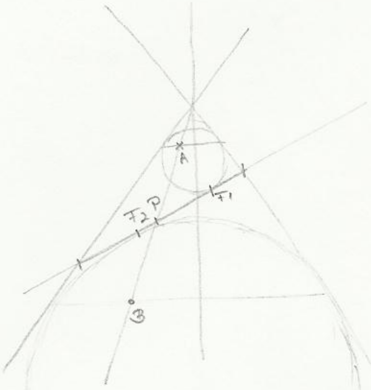
hiperbola
(2 alkotóval ||)

BIZ.:

b)



→ a gömb érinti a síkot



PA és PF_1 érintője a kis gömbnek $\Rightarrow PA = PF_1$
PB és PF_2 érintője a nagy gömbnek $\Rightarrow PB = PF_2$ } $\Rightarrow$

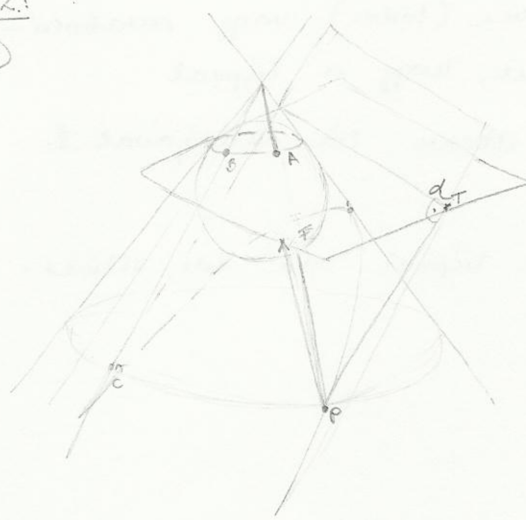
$\Rightarrow PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB =$ állandó (P-től független)

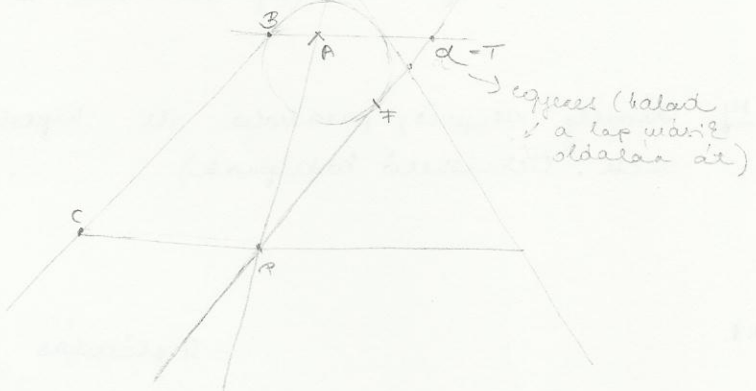
$\Rightarrow$ a síkmetszet ellipszis

Def: Ha adott a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont, akkor azon pontok mértani helye, melyek az adott egyenestől és ponttól egyenlő távol vannak, parabolának nevezzük.

BIZ.:

c)





PA és PF érintő a kis gömbhöz ⇒ $PA = PF$

Az A-ra és a P-re illeszkedő körök egyenlő nagyságú szakaszokat vágnak ki az alkotókból ⇒ $PA = BC$ } ⇒

De BCPT négyszög paralelogramma ⇒ $BC = PT$

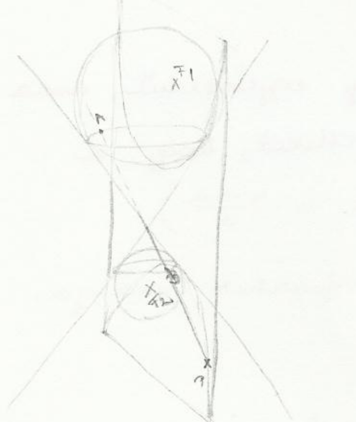
⇒ $PA = PT$ ⇒

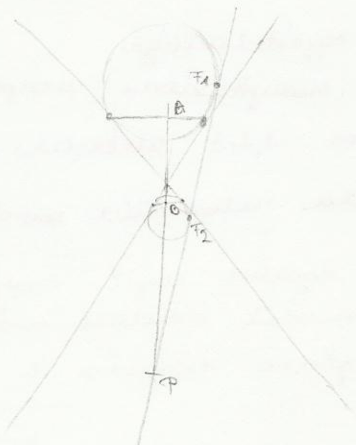
⇒ P pont egyenlő távol van az F ponttól és a d egyenestől ⇒ a metszet parabola.

Def: Ha adott a síkon két pont és egy a két pont távolságánál kisebb távolság, akkor azon pontok mértani helye, melyeknek a két adott ponttól vett távolságuk különbsége az adott távolság, hiperbola.

BIZ.:

d.)





PA és PF_1 érintő a felső gömbhöz : $PA = PF_1$ } ⇒

PB és PF_2 érintő az alsó gömbhöz : $PB = PF_2$

⇒ $PF_1 - PF_2 = PA - PB = AB$ ⇒ állandó (P-től független) ⇒

⇒ a metszet hiperbola

Következmény: Egy sík egy egyenes körkúpot ellipszisben (körben) vagy parabolában vagy hiperbolában metsz, aszerint, hogy a kúpnak egyik alkotójával sem ||, vagy egy illetve két alkotójával ||.

Mj: Bármely ellipszis, parabola ill. hiperbola alapú kúpnak van kör síkmetszete. (Teríthető körkúpnak)

XII. 1.

11. előadás

Térfogatszámítás 8. tétel

Tétel: A térfogat-függvény létezése

$\exists$ olyan v: {poliéderek halmaza} $\to \mathbb{R}^+$ fgv, úgy, hogy teljesülnek a következők:

I) Az egységkocka térfogata 1.

II) Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.

III) Ha egy poliédert egy síkkal két részpoliéderre vágunk, akkor a részek térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatát adja.

BIZ.: 1., térfogatot rendelünk a tetraéderhez

2., ennek segítségével térfogatot rendelünk a konvex poliéderekhez - tetraéderek összegeként

3., térfogatot rendelünk a konkáv poliéderekhez - konvex poliéderek összegeként

Tétel: Térfogat-függvény egyértelműsége

Az előző tétel bizonyításában szereplő térfogat-függvény egyértelmű, azaz ha teljesülnek az 1,2,3 feltételek, akkor ebből következik, hogy a tetraéder térfogata: alapterület szorozva magasság per 3. $\left(V = \frac{a \cdot m_a}{3}\right)$

BIZ.: menete: 1) - ha két téglatest egyik lapja egybevágó $\Rightarrow$ térfogatuk aránya, és a harmadik oldalaik aránya egyenlő.

2) - az egységkocka térfogata 1.

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}$

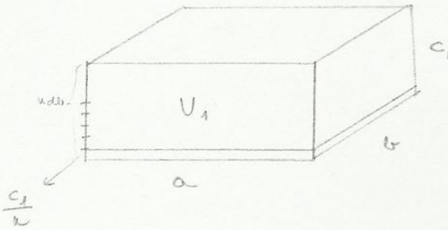
téglatest térfogata: „a·b·c"

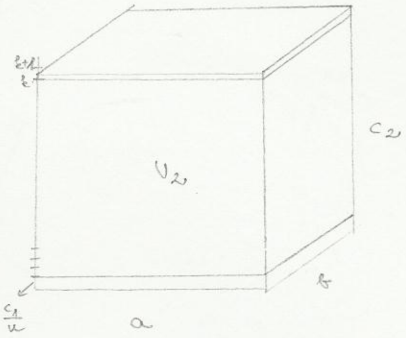
3) - 1 $\Rightarrow$ a paralelepipedon térfogata: Talap · magasság

4) - a paralelepipedont hat egyenlő térfogatú tetraéderre bonthatjuk $\Rightarrow$ a tetraéder térfogata: $\frac{\text{Talap} \cdot \text{magasság}}{3}$

28

I.)





- felosztjuk a c_1 oldalt n egyenlő részre.
- az $a, b, \frac{c_1}{n}$ oldalú kis téglatestek egybevágók ⇒ (2. tulajdonság) térfogatuk egyenlő (3. tulajdonság miatt) $\frac{U_1}{n}$ a térfogata
- $\frac{c_1}{n}$-et felmérjük c_2-re, ahányszor tudjuk (k.)

$$\underbrace{\begin{aligned} k \cdot \frac{c_1}{n} &\le c_2 < (k+1)\frac{c_1}{n} \\ k \cdot \frac{U_1}{n} &\le U_2 < (k+1)\frac{U_1}{n} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

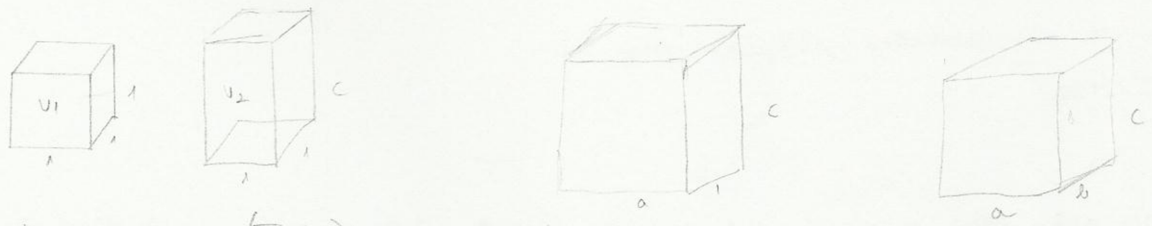
$$\frac{k}{n} \le \frac{c_2}{c_1} < \frac{k+1}{n}$$

$$\frac{k}{n} \le \frac{U_2}{U_1} < \frac{k+1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{c_2}{c_1} - \frac{U_2}{U_1}\right| < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \frac{U_2}{U_1}$$

II.)



(1. tul) $\Rightarrow U_1 = 1$

(I. biz) ⇒ $\frac{c}{1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_2 = c$

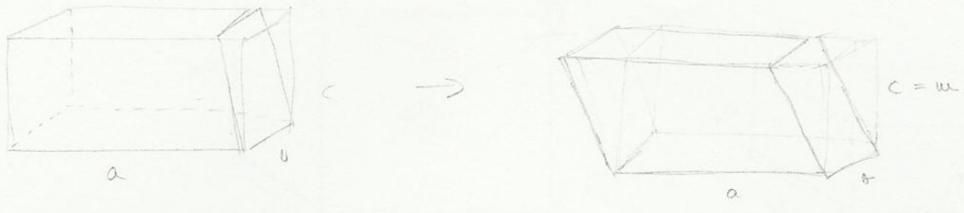
(I. biz) ⇒ $\frac{a}{1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_3}{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_3 = a \cdot c$

(I. biz) ⇒ $\frac{b}{1} = \frac{U_4}{U_3} = \frac{U_4}{a \cdot c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{U_4 = a \cdot b \cdot c.}}$

III.)

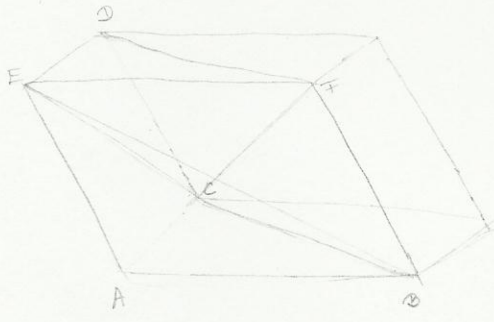


Az átdarabolás nem változtatja meg az össztérfogatot (III. tétel) ⇒

⇒ $V_{paralelepipedon} = V_{téglatest} = \underbrace{a\cdot b}_{T_{alap}}\cdot \underbrace{c}_{m} = T_{alap}\cdot m$

IV. St: Ha két tetraéder olyan, hogy egy-egy lapjának területe, és a hozzájuk tartozó magasság megegyezik, akkor a két tetraéder térfogata egyenlő.

BIZ: —



a) ABCE tetraéder
b) BCEF tetraéder
c) CFED tetraéder

1.) A b) és a c) tetraéder térfogata egyenlő.

a CFB△ ≅ CFD△

a magasságuk pedig a BFDC sík és az E pont távolsága. (st ⇒ a térfogat egyenlő)

2) Az a) és b) tetraéder térfogata egyenlő, mert az ABE△ ≅ BEF és a magasságuk az ABFE sík és a C pont távolsága (st ⇒ a térfogat egyenlő)

⇓

a paralelepipedon felét 3 egyenlő térfogatú tetraéderre bontottuk. ⇒ állítás.

Testek térfogata 9. tétel

Def.: A tér korlátos részhalmazát testnek nevezzük.

Def.: A test beírt poliédere olyan poliéder, melynek minden pontja a test belső pontja

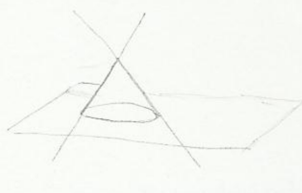
Def.: A test körülírt poliédere olyan poliéder, melyhez képest a test valamennyi pontja poliéder belső pontja.

Def.: Ha a test beírt poliéderei térfogatának pontos felső korlátja, és a körülírt poliéder térfogatának pontos alsó korlátja megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy a testnek létezik térfogata, és ez a térfogat a közös pontos korláttal egyezik meg.

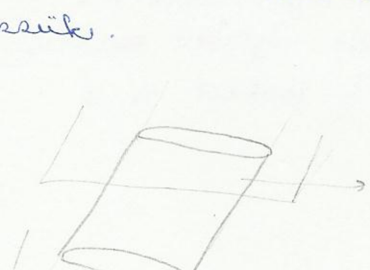
A henger és a kúp térfogata:

Megj.: Ismert a gúla és a hasáb térfogata: $\frac{T_a \cdot m}{3}$ ill. $T_a \cdot m$

Def. Ha a kúpfelületet egy, a kúp csúcspontjára nem illeszkedő síkkal elmetszük, akkor a metszet és a csúcspont közötti részt kúptestnek (kúpnak) nevezzük.

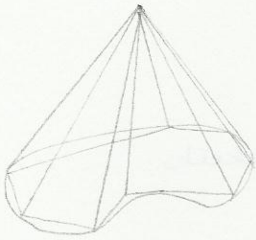


Def.: Ha a hengerfelületet 2 egymással ||, de az alkotókkal ∦ síkkal metszük ⇒ a 2 síkmetszet közötti részt hengertestnek (hengernek) nevezzük.



Tétel: A kúp térfogata: $\frac{T_a \cdot M}{3}$ (alapterület szorozva magasság / 3)

BIZ.:



- az alapgörbét (síkidom) beírt és körülírt sokszögekkel közelítjük, és ezekre a kúp csúcsával megegyező csúcsú gúlákat emelünk.

Megfigyelhető:

1) a beírt és körülírt sokszögek területeinek pontos felső és alsó korlátja az alapsíkidom területe

2) az összes gúla magassága egyenlő a kúp magasságával. => A beírt gúlák térfogata: beírt sokszögek területe szorozva a magassággal osztva 3-mal, a körülírt gúlák térfogata: körülírt sokszögek területe szorozva a magassággal, osztva 3-mal.

$$\Downarrow$$

$$\text{a kúp térfogata} = \frac{\text{az alapsíkidom területe} \cdot \text{magasság}}{3}$$

Tétel: A henger térfogata: alapterület szorozva magassággal.

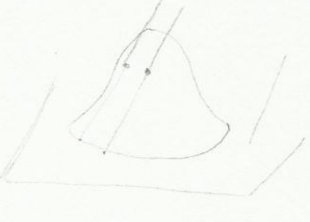
BIZ.: analóg a kúphoz.

Megj.: A kúpnak ill. hengernek akkor ∃ térfogata, ha az alapsíkidomnak ∃ területe.

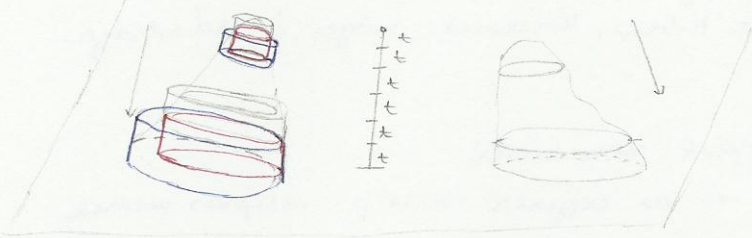
kavalieri

Tétel: (Cavalieri - elv)

Ha két test egy síkhoz képest ugyanazon féltérben helyezkedik el, a síkkal ∥ síkmetszeteik páronként egyenlő területűek, és mindkét testhez ∃ 1-1 olyan irány, hogy az ezzel az iránnyal ∥ egyenesekkel elmetszve a testet a metszet mindig az alapsíkon végződő szakasz, valamint az egyik testnek ∃ térfogata ⇒ a másik testnek is ∃ térfogata és ez a két térfogat egyenlő.



BIZ.:



csak egyforma lehet a magasság (M)

A körülírt hengerek térfogata a két testnél páronként egyenlő ⇒ az összegük is egyenlő. $= K_H$

A beírt hengerek térfogata is páronként egyenlő ⇒ az összegük is egyenlő $= B_H$.

Tfh! a baloldali testnek V $\exists$ térfogata: V

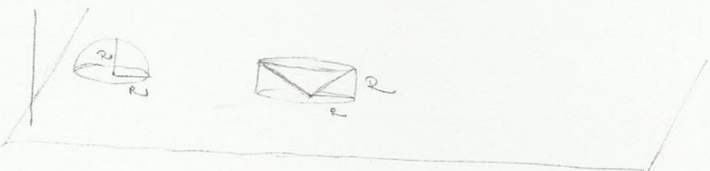
$$B_H \le V \le K_H$$

$K_H - B_H =$ legalsó körülírt henger térfogatával

ha $t \to 0 \Rightarrow K_H - B_H <$ tetszőleges ε-nál $\Rightarrow K_H = B_H \Rightarrow B_H = V = K_H$

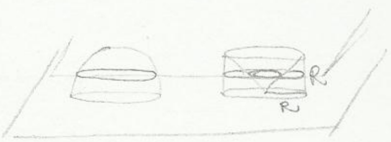
mindez a másik testre is érvényes ⇒ neki is van térfogata (=V).

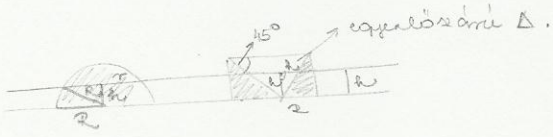
Példa: Gömb térfogata Cavalieri-elvvel



síkban:

?





$r^2 = R^2 - h^2$

$R^2 - h^2 \cdot \pi$

síkmetszet területe

⇓

Alkalmazható a Cavalieri elv

$$\underline{\underline{V_{félgömb}}} = V_{henger} - V_{kúp} = R^2\pi \cdot R - \frac{R^2\pi R}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}R^3\pi}}$$

⇓

$$V_{gömb} = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Tételsor:

1) A területfogalom létezése
2) A területfogalom egyértelműsége, síkidomok területe
3) Párhuzamosság és merőlegesség a térben, térelemek szöge és távolsága
4) Poliéderek
5) Másodrendű felületek és a gömb síkmetszetei
6) Egyenes körhenger síkmetszetei és az egyenes körkúp ellipszis metszete
7) Egyenes körkúp síkmetszetei (kiv. ellipszis metszet.)
8) Térfogatszámítás, térfogatfogalom létezése és egyértelműsége
9) Testek térfogata