halm. elm.

1. előadás IX. 15.

irodalom:
Matematikai logika és a halm. elm. elemei. ⇒ Sashalminé

Vizsga: feladat + tétel

1. tétel

Halmazelmélet és a logika fejlődése:

I. halmazelmélet fejlődése:

- fiatal tudomány
- kialakulása XIX. sz. második fele
- nagyfokú absztrakció kell hozzá
- létrejöttét 3 tényező segítette:
  - a, figyelem a halmazok elemeiről a halmazokra terődött
  - b, kritikai szellem fejlődése, az eddigi bizonyításokat felülvizsgálták
  - c, a végtelen sorok vizsgálatánál felismerték, hogy a véges halmazok tulajdonságaival nem rendelkeznek (legtöbb esetben) a végtelen halmazok.

- atyja: Georg Cantor
  - nevéhez fűződik a Cantor-féle kontinuum hipotézis.
- ellentmondásokat találtak az elméletben
- A antinómiák kiküszöbölésére 3 irányzat van:
  1. Logicizmus: Bernard Russell (filozófus is)
     álláspontja: a matematika a logika része, az ellentmondást logikailag

megoldás: bizonyos típusú definíciók kiküszöbölése (?)
nem szerencsés, a matematikában vannak jól használható ilyen definíciók.

2, Intuicionizmus

szerintük az ismeretszerzés alapja nem a tapasztalat v. a logika, hanem velünk született ősi intuíció.
A matematika feladata intuitív konstrukciós tevékenység.

Mj.: Arisztotelész: Kétféle végtelen:

a, potenciálisan végtelen halmaz, végtelen sorozatként képzelhető el
b, aktuálisan végtelen halmaz, ha az adott halmaz végtelen, és egy elem hozzávételével már megváltozhat a tulajdonsága.

Az intuicionisták szerint az antinomiák egyik oka, hogy a matematikusok az aktuálisan végtelen (nem konstruálható) halmazokat vizsgálják.

Arisztotelész két törvénye:

I. Ellentmondásmentesség törvénye
Egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz is és hamis is.

II. A harmadik kizárásának törvénye:

Ha egy kijelentés nem igaz, ⇒ hamis, harmadik lehetőség nincs.

Az intuicionisták szerint az antinómiák oka lehet az, hogy a harmadik kizárásának törvényét végtelen halmazokra alkalmazzák. Az intuicionista logikában ez nem szerepel.

3, Formalizmus: David Hilbert

Hilbert szerint az antinomiák oka az, hogy bármi lehet halmaz. Axiomatikusan kell felépíteni a halmazelméletet, axiómákban kell megfogalmazni, hogy mi lehet halmaz. (Csak az axiomatizálás nem véd meg az antinómiáktól, lsd. félév vége: NAIV HALMAZELMÉLET.)

A legismertebb axiómarendszer a Zermelo-Frankel (cermelo-frenkel) féle axiómarendszer.

II. A matematikai logika fejlődése:

logika: a görög logosz (gondolat) szóból származik. A logika a gondolkodás törvényszerűségeit vizsgáló tudomány. Különösen a helyes következtetések vizsgálatával foglalkozik.

A formális logika atyja: Arisztotelész

pl.: Minden nyolccal osztható szám osztható néggyel.

Minden néggyel osztható szám osztható 2-vel.

Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel.

helyes következtetés

Minden S, P

Minden P, R

Minden S, R

A logika megújítója Leibnitz volt. Ő formális nyelvet akart megalkotni.

Boole a logikai algebra megalkotója.

20. sz. 30-as éveiben: Gödel, (csörcs) Church

Gödel nevéhez sok nemleges törvény fűződik.

- A matematikai logika feladata az egyes matematikai elméletek átfogó vizsgálata.

III. A matematikai elméletek vizsgálata:

Első lépés a matematikai elmélet formalizálása egy precíz matematikai, logikai nyelv segítségével.

Mj.: A formalizálás azért fontos, mert kivédi az esetleges félreértéseket, és néhány antinómia is kivédhető.

1; Csak a formalizálás azonban nem véd meg az antinómiáktól.

2., Fő axiómákra kell építeni a matematikai elméletet.

- Az axiomatikus felépítésnél az axiómarendszerrel szemben vannak követelmények.
- Kérdés: igazak-e a halmazelmélet axiómái?

Kétféle filozófiai álláspont:

a., Platonizmus (Gödel)

b., Formalista álláspont (Russell)

manipulálás szimbólumokkal.

Mj.: A hagyományos logika szerint a központi fogalom a kijelentés.

Kijelentés: Olyan kijelentő mondat, amelyről az adott körülmények között el tudjuk dönteni, hogy IGAZ vagy HAMIS.

A legegyszerűbb ún. atomi kijelentések igaz voltának eldöntése nem a logika feladata. (Tapasztalat, szaktudományok)

Érvényben van Arisztotelész két törvénye, az ilyen logikát kétértékű logikának nevezzük.

Az atomi kijelentésekből összetett kijelentéseket képezünk, de csak olyan összetétel szerinthető logikai összetételnek, amelynél az összetevők logikai értéke a végeredmény logikai értékét egyértelműen meghatározza.

Pl.: Laci megtanulta a leckéjét és elment moziba.

Laci elment moziba, mert megtanulta a leckét.
nem logikai összetétel az okhatározói mellékmondat

2., Speciális mat. log. nyelvek

3., Elsőrendű mat. log. nyelvek → szintaxis
→ szemantika

* 4., Speciális logikai nyelvek → kijelentés logika
→ tiszta predikátum log. ny.

* 5., Következményfogalom

– 6., Levezetés

! 7., Formális axiomatikus elméletek

8., Naiv halmazelmélet

9., Z-F-F féle elmélet (analízis)

IX.22. **2. tétel** 2. előadás

Bevezetés különböző matematikai nyelvek elméletébe

Mat. elméletben:

termek:
- x, y…: változók, halmazok elemeit jelölik
- 0, π: konstansok, konkrét objektumot jelölnek
- x+y: fgv-ek → konkrét fogalmat jelöl

A fgv-ekben a változók helyére egy adott alaphalmaz elemeit írjuk, egy konkrét objektumot kapunk.

Formulák: állításokat írnak le

x < y (nyitott mondat, reláció)

pl.: 3 < 2 HAMIS

Egy nyelv esetén megkülönböztetjük a nyelv szintaxisát és szemantikáját.

Szintaxis: Jelsorozatokkal történő manipulálás jelentésre való hivatkozás nélkül. A csak szintaktikailag felépített rendszereket logikai kalkulusoknak nevezzük.

Szemantika (Jelentéstan): Itt már a formulák értelmezése, értékelése történik.

Megkülönböztetünk tárgynyelvet és metanyelvet.

Tárgynyelv: amelyről beszélünk. (geometria)

Metanyelv: amelyen a tárgynyelvről beszélünk (magyar)

Példák matematikai logikai nyelvekre:

1, Geom nyelv: az elemi geometria leírására szolgál.

Három típusú nyelv 3 féle változója van

- A, B, C → írott nagybetűk: az euklideszi tér pontjait jelölik
- a, b, c → az euklideszi tér egyeneseit jelölik
- α, β, γ → -"- síkjait -"-

konstans > nincs
fgv

Atomi formulák:

- $A = B$ kiolvasása: A pont egyenlő B ponttal

  igaz, ha a két pont egybeesik

- $A \in a$ A A pont illeszkedik az a egyenesre

  igaz, ha a pont pontja az egyenesnek ~~van~~

- $A \in \alpha$ A A pont illeszkedik az α síkra

  igaz, ha a pont pontja a síknak

Összetett formulák:

Tárgynyelvi jel	Metanyelvi kiolvasás	metany-i elnevezés
$\neg$	nem igaz	negáció-jel
$\wedge$	és	konjunkció-jel
$\vee$	vagy	diszjunkció-jel
$\Rightarrow$	ha ... akkor	kondicionális-jel (implikáció)
$\forall$	minden, összes	univerzális kvantor
$\exists$	létezik, van olyan	egzisztenciális kvantor

Használatos segédjelek

- zárójelpárok : műveleti sorrendet biztosítják
- $:=$ definiáló egyenlőségjel (termek között)
- $:\Leftrightarrow$ -"- ekvivalencia-jel (formulák között)
- $A \Leftrightarrow B :\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

  akkor és csakakkor (megnevezés: bikondicionális /ekvivalencia)

- $\exists!$: egzisztencia-unicitás kvantor

V

$\exists! x A(x) :\Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \forall y \forall x ((A(x) \wedge A(y)) \Rightarrow (x=y))$

- $\alpha=\beta :\Leftrightarrow \forall A (A \in \alpha \Leftrightarrow A \in \beta)$

  minden A-ra, ha $A \in \alpha \Leftrightarrow A \in \beta$-ra is

- $\alpha \parallel \beta :\Leftrightarrow \neg \exists A (A \in \alpha \wedge A \in \beta)$

- 3 nem kollineáris pontra 1 és csak 1 sík illeszkedik

$\forall A \forall B \forall C ((\neg \exists a (A \in a \wedge B \in a \wedge C \in a)) \Rightarrow \exists! \alpha (A \in \alpha \wedge B \in \alpha \wedge C \in \alpha))$

2; Ar nyelv (elemi aritmetika nyelve)

– 1 típusú nyelv

Változói :

termek

- x, y, z : természetes számok
- 0 : 0 természetes szám (nulla)

Fgv jelek:

- s : egyváltozós fgv-jel, egynek a hozzáadását jelenti
- $+$, $\cdot$ > kétváltozós fgv-jelek összeadás, szorzás

Pl.: $SS0 \to$ 2-t jelöli

$S0+x \to$ nyílt term

$S0+SS0 \Rightarrow$ zárt term

Atomi formulák:

- $t=z$, ahol t és z vmilyen term

Az összetett formulák a geom nyelvnél felsorolt formulák segítségével történik.

Pl.: $x \leq y :\Leftrightarrow \exists u\,(x+u=y)$ valós számok körében nem jó

Mj.: Ezt a nyelvet használják valós számok leírására is.

Az Ar nyelvnek azt a formuláját, amely a terinkett interpretációban minden értékelésnél igaz, aritmetikai törvénynek nevezzük.

Pl.: $\forall x \forall y\,(x=y \Rightarrow y=x)$ term. számok körében és a valós —"— is igaz.

3, Vect nyelv: (n dimenziós vektortér leírására)

- két típusú nyelv
- két féle változói vannak a valós számok és a vektorok jelölésére
- két típusú konstansa van.
  - 0 valós szám
  - $\underline{0}$ nullvektor

Mj.: Mi a továbbiakban főleg egy típusú nyelvekkel foglalkozunk, ezért a def-k is ilyenekre vonatkoznak.