Elsőrendű nyelvek, szintaktikai fogalmak — 3. tétel

Def.: Az elsőrendű matematikai logikai nyelvet (mat log) 4 halmazzal adjuk meg:

$\mathcal{L} := \langle S, C, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

S: A nyelv típusainak a számát mutatva lehet egyelemű ... stb.

pl.: geom nyelv → az S 3 elemű

Minden változótípushoz megszámlálhatóan végtelen sok jel tartozik, melyek a változókat jelölik. nem üres halmaz, melynek elemeit típusoknak nev.

C: A konstans jelek halmaza. Lehet üreshalmaz is. (pl.: geomnyelvnél)

$\mathcal{F}$: függvényjelek halmaza.

Általános alakja $f(x_1, \dots, x_n)$ $x \in \mathbb{N}$ n változós függvény

$g(x_1, x_2) := x + y$ → pl.: az A_r nyelvben a kétváltozós fgv.

P: prédikátum betűk halmaza. Nem lehet üreshalmaz.

$p(x_1, \dots x_n)$ $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

Ha $n = 0$ akkor nullváltozós prédikátumról, vagy propozicionális betűről beszélünk

Pl.:

$P(x, y) :\Leftrightarrow x = y$

A adott nyelvben definiálhatók értelmes jelsorozatok, melyek az Ω szimbólumai, logikai jelek és a segédjelek (zárójelek, vesszők) segítségével állíthatók elő.

Alakzatok

Termek   Formulák

<u>Def.</u>: Term: Induktív definíció az első két lépés az indukció alapja, a harmadik a generáló szabály, amely már létező termekből újak alkotását teszi lehetővé.

1.) Az Ω nyelv minden változója term.

2.) -"- konstansa term.

3.) Ha f a nyelv n változós fgv jele, $t_1, t_2 \ldots, t_n$ termek, akkor $f(t_1, t_2 \ldots, t_n)$ is term.

<u>Példa</u>:

$h(g(x,y,z), c)$ term. 2-szeresen összetett

<u>Def.</u>: A termben szereplő változókat a term paramétereinek nevezzük. A termben a fgv-jelek száma a term összetettségi számát mutatja.

Def: Formulák

1) Atomi formulák: Ha P a nyelv n változós ($n \geq 0$) predikátum-betűje, $t_1, \dots t_n$ termek, akkor a $P(t_1, \dots t_n)$ atomi formula.

A P nullaváltozós is atomi formula.

2) Összetett formulák: Használható jelek: logikai-összekötőjelek ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$), kvantorok ($\forall, \exists$) ezek önmaguk a logikai jelek.

Induktív a definíció.

1) Minden atomi formula formula

2) Ha A formula, akkor $\neg A$ is formula

Ha B is formula, akkor $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ is formula.

3) Ha x a nyelv változója, A formula, akkor $\forall x A$, $\exists x A$ is formula.

Mj.: A def. alapján bármely jelsorozatból eldönthető, hogy formula-e.

$(A \Rightarrow B) \vee C$ formula

$A \Rightarrow (B \vee C)$

Mj.: A korábban már bevezetett bikondicionálist és az egzisztencia-unicitás kvantort is használjuk. ($\Leftrightarrow$, $\exists !$)

Def: Egy formula azon részét, amely maga is formula, a tekintett formula részformulájának nevezzük.

Def.: Egy formulában a logikai jelek számát a formula összetettségi számának nevezzük.

Pl.:

$$\exists y\,(P(y) \Rightarrow \exists x\, R(x,z)) \vee (\forall z\, S(z,y) \wedge Q(x,y))$$

6-szorosan összetett

$\exists y\,(P(y) \Rightarrow$ Ez nem részformulája az előzőnek.

Def.: $\forall x A$, $\exists x A$ formulákban, a $\forall x$, $\exists x$ jeleket kvantoros előtagnak nevezzük.

x : kvantifikációs változó

A : kvantor hatásköre

Def.: Azt mondjuk, hogy egy változó előfordulása egy formulában kötött előfordulású, ha szerepel egy ráható kvantor hatáskörében.

Szabad előfordulású, ha nem kötött.

Def.: A formula szabad változóját a formula paraméterének nevezzük.

Def.: Egy formulát zárt formulának nevezünk, ha minden változója kötött előfordulású. (a kijelentéseknek ilyen a formulája)

Def.: Ha egy formulának van szabad előfordulású változója, akkor az nyílt formula. Az ilyen formulák argumentumszámát a különböző, szabad előfordulású változók száma adja meg.

Pl.:

$$\exists y\,\underbrace{(P(y)}\Rightarrow \exists x\,\underbrace{R}(x,\overset{\uparrow}{z})) \vee (\forall z\,\underbrace{S}(z,\overset{\uparrow}{y}) \wedge Q(\overset{\uparrow}{x},\overset{\uparrow}{y}))$$

Nyitott formula 3 argumentumú (4 szabad változóból 3 különböző)

Mj.: Egy változónak egy formulán belül lehet kötött és szabad előfordulása is.

Mj.: Az elsőrendű nyelvek elnevezésben az elsőrendű szó arra utal, hogy a kvantorok csak változó jelekre vonatkozhatnak, predikátum betűkre nem.

Az eddig ismertetett nyelvek elsőrendűek, de a naiv halmazelmélet nyelve másodrendű nyelv lesz.

3. előadás

IX. 29.

Kötött változók átjelölése:

$x \le y :\Leftrightarrow \exists u\,\underbrace{(x+u=y)}$

$x \le y :\Leftrightarrow \exists p\,\underbrace{(x+p=y)}$

$x \le y :\Leftrightarrow \exists x\,\underbrace{(x+x=y)}$ y páros szám

Kötött változó átjelölésénél arra kell vigyázni, hogy szabad változó nem kerülhet kvantor hatáskörébe.

Def.: Ha két formula csak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésben különbözik egymástól, akkor azokat KONGRUENS formuláknak nevezzük.

A kongruens formulák váza megegyezik.

Term helyettesítése formulával:

1, Csak szabad változó helyettesíthető termmel.

2., A helyettesítés során a helyettesítő term szabad változója nem kerülhet kvantor hatáskörébe.

Mj.: A továbbiakban csak a 2, -nak megfelelő helyettesítéseket végezzük. Ezt szokás szabályos helyettesítésnek is nevezni.

Def.: Egy formula rendelkezik a változó tisztaság tulajdonsággal, ha a szabad és a kötött változói különböznek, valamint kvantorok különböző előfordulásai különböző változókat kötnek le.

Példa:

1) $(\forall x\, Q(x,y,z))^{y}_{y+x}$

$\forall x\, Q(x,y+x,z)$ nem megengedett váz ez, mert a szabad változó bekerült kvantor hatáskörébe.

Eljárás:

1) átjelöljük a kötött változót:

$(\forall u\, Q(u,y,z))^{y}_{y+x}$

$\forall u\, Q(u,y+x,z)$ elkerültük a szabad változó kvantor hatáskörébe kerülését

② $(\forall y\ \exists z\, \underline{R(z,x)} \wedge Q(x))\,(x \parallel g(x,y))$

↳ szabályos helyettesítéssel

Fiktív kvantor ⇒ nincs a hatás-
körben változó

$(\forall y\ \exists z\, R(z;\, g(x,y)) \wedge Q(g(x,y)))$

y-ból valódi kvantor lett ⇒ megváltozott a váz.

1.) $\forall u\ \exists z\, R(z,\, g(x,y)) \wedge Q((g(x,y))$

A formula váza így nem változik

③ $((\forall y\ P(y,z) \vee \exists y\, R(x,y))\ \begin{pmatrix} x & z & y \\ f(x,y) & y & z \end{pmatrix}$

A y kötött, nem írunk helyére semmit.

$(\forall u\ P(u,z) \vee \exists v\ R(x,v)$

$\forall u\ P(u,y) \vee \exists v\ R(f(x,y), v)$

A nyelv szemantikája, értékelés   4. tétel

Mj.: Folytathatnánk a kiépítést szintaktikai úton, ekkor kapnánk logikai kalkulust. Most a szemantikai irányban építünk tovább, azaz értelmezzük, értékeljük a formulákat és termeket.

Példa:

④ $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$

Legyen alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$P(x) :\Leftrightarrow 8 | x$

$Q(x) :\Leftrightarrow 2 | x$

Minden 8-cal osztható egész szám osztható 2-vel is.

alaphalmaz : 4$\measuredangle$-ek halmaza

$P(x) :\Leftrightarrow x$ átlói merőlegesek
$Q(x) :\Leftrightarrow x$ paralelogramma $\boxed{\text{hamis}}$

Minden olyan 4$\measuredangle$, melynek átlói $\perp$-ek, paralelogramma.

Ha adott egy Ω elsőrendű nyelv, tekintünk egy alaphalmazt v. hordozót. Jele: U v. D. A változók ezen halmaz elemeit jelölik.

Az AR nyelvnél csak a 0 konstans, és célszerű lenne ha az alaphalmaz, a természetes számok is konstansok lennének. Elméleti problémák miatt ez nem lehetséges, ezért kibővítjük a konstansok halmazát a hordozó elemeivel. Jelölés: $\Omega = < S, C(D), F, P >$
$\underline{a} \in 0$: ‚a' a hordozó eleme.

A nyelv interpretációját vagy modelljét négy függvénnyel adjuk meg.

$M := < \bar{S}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{P} >$

$\bar{S}$: Minden típusú változóhoz hozzárendelünk egy halmazt.

$\bar{C}$: Minden konstans jelhez hozzárendeljük a hordozó egy elemét.

$\bar{F}$: Minden n változós fgv jelhez hozzárendelünk egy konkrét, a hordozón értelmezett fgv-t.
Pl.: az AR-nyelvben egy két változós fgvjel, hozzárendeljük x, y-ra vonatkozó fgv-t. (egész)

$\bar{P}$: Minden n változós prédikátum-betűhöz hozzárendelünk egy olyan n változós fgv-t, amely az alaphalmazon van értelmezve és értékkészlete $\{0, 1\}$ (igaz - hamis) kételemű halmaz.

Mj.: Ha rögzítjük az Ω nyelv valamely modelljét ⇒ értelmezhetjük az értékelt termeket és az értékelt formulákat.
$|t|_M$ ⇒ M modellben a t term értéke.

Def.: induktív módon történik a term definíciója.

- c: Ha c konstans, akkor értéke a hordozó egy eleme.
  $c \in C$
- $\underline{a}$: konstansokkal kibővített hordozók halmazának az eleme.
  $\underline{a} \in C(D)$
- Ha $\tilde{f}$ egy konkrét fgv-t jelent, a $(|t_1|_M - |t_n|_M)$ értékelt termek, akkor ez egy értékelt term, melyhez az alaphalmaz eleme tartozik.

Pl.: $\tilde{f}$: $x+y$ ⇒ 2 változós fgv
$3+4$ ⇒ kibővített konstanshalmaz elemei, 7-et jelöl
(az alaphalmaz egy konkrét elemét jelöli)

Mj.: A értékelt v. zárt termek mindig az alaphalmaz egy elemét jelentik.

Formulák értékelése:

A formulákat $(M \models A)$ M-ben igaz, és M-ben hamis formulákra osztjuk. $(M \not\models B)$.

Egy M modellben egy atomi formula igaz

$$M \models \tilde{P}(|t_1|, \ldots, |t_n|) = 1 \qquad \text{pl.: } x \leq y \;,\; 3 \leq 5$$

Konkrét predikátum : $\tilde{P}$
értékelt termeket írunk a változók helyére : $3 \leq 5$ ⇒ el tudjuk dönteni, h. igaz v. hamis. EZ IGAZ.

(Ha konkrét n változós predikátum változói helyére értékelt termeket írunk, akkor zárt formulát kapunk ha igaz, akkor a modellben igaz az atomi értékelt predikátum.)

ha P mellváltozós igaz v. hamis.

Összetett formulák értékelése.

$M \models \neg A$, ha nem igaz, hogy $M \models A$

$M \models A \wedge B$, ha $M \models A$ és $M \models B$

$M \models A \vee B$, ha $M \models A$ vagy $M \models B$

$M \models A \Rightarrow B$, ha $M \models A$ akkor $M \models B$

$M \models \forall x A$

→ Ha az A formulában x helyére a hordozó elemeit helyettesítve igaz formulát kapunk, akkor M-ben igaz a $\forall x A$.

$M \models \exists x A$: Ha x helyére találunk olyan alaphalmazbeli elemet, melyre az A formula igaz.

A logikai jelek értékelésének pontosítása:

1., negáció:

Def.: Legyen A formula. $\neg A$. Kiolvasása: nem igaz, hogy A, vagy ezzel egyenértékű megfogalmazás.
Értékelése: igaz, ha A hamis, és hamis, ha A igaz.

A	$\neg A$
I	H
H	I

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
1	0	1
0	1	0

→ kettős tagadás logikai értéke megegyezik az eredetivel.

Fontos következménye a kettős tagadás törvényének:
Ha egy formula előtt véges sok negációjel van, és azok száma páros, akkor elhagyhatók, ha páratlan, eggyel helyettesíthetők.

Tagadjuk:

Á: Ennek az egyenletnek a gyöke pozitív.
T: —"— negatív vagy 0.

Á: Mindenki tud úszni.
T: Nem mindenki tud úszni.
Valaki nem tud úszni.