2, Konjunkció:

Def.: Legyen A, B két formula. Kiolvasása A és B, vagy ezzel egyenértékű megfogalmazás.
Értékelése: Akkor és csak akkor igaz, ha A és B is igaz.

A	B	$A \wedge B$
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

Megállapítás: Nem minden 'és' fejez ki konjunkciót, valamint, nem minden konjunkció van 'és'-sel kifejezve.

Pl.: A': Kati és Laci főiskolások. konjunkció

A': Kati és Laci unokatestvérek. reláció
A': $\underbrace{\text{Borús az idő}}_{B}$, de $\underbrace{\text{nem}}_{\neg}$ $\underbrace{\text{süt a nap}}_{S}$. konjunkció (mert mellérendelés → bár, holott, ellenben, de ...)

3, diszjunkció: Legyen A, B két formula.
A vagy B, ahol a 'vagy' megengedő értelmű 'vagy', diszjunkciónak nevezzük.
Értékelése: Akkor és csak akkor hamis, ha A és B is hamis.
A 'VAGY' jelentései:
1) Beteg halálát $\underbrace{\text{orvosi műhiba}}_{A}$ vagy $\underbrace{\text{szívmegállás}}_{B}$ okozta.
2) Ma este vagy $\underbrace{\text{moziba}}_{A}$ megyek, vagy $\underbrace{\text{otthon}}_{B}$ olvasok.
3) Iszik vagy vezet.

		1	2	3
A	B	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \mid B$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0
			bikondicionális tagadása	konjunkció tagadása

1; Akkor és csak akkor igaz, ha legalább az egyik tag igaz.

2; kizáró 'vagy' = zsegalkin művelet.
Akkor és csak akkor igaz, ha pontosan az egyik igaz.

3; Összeférhetetlenségi értelmű 'vagy' = Sheffer-művelet.
(A vonal B)
Akkor és csak akkor igaz, ha legfeljebb az egyik igaz.

X.6. 1. előadás

4., kondicionális:

(6-os fejezet nem kell)

Def.: Legyen A és B formula ($A \Rightarrow B$: A kondicionális B) illetve ha A akkor B és azzal egyenértékű megfogalmazás.

Értékelése: Akkor és csak akkor hamis, ha A igaz és B hamis.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

→ igazból hamis nem következhet
> hamisból bármi következhet

A és B nem felcserélhető.
A: előtag
B: utótag

$A \Rightarrow B$
def. alapján: • Ha A akkor B
• A elégséges feltétele a B-nek, B szükséges feltétele A-nak.
• Csak akkor A, ha B.

5; Bikondicionális:
Legyen A és B formula.
Elnevezés A bikondicionális B.

$A \Leftrightarrow B :\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Akkor és csak akkor igaz, ha mindkettő igaz v. hamis.

Korábban bevezetett művelet tagadása → ,kizáró vagy' tagadása.

Kiolvasása : - ha A akkor B és B akkor A
- A elégséges és szük. v feltétele, B elégséges és szüks. v feltétele A-nak
- A csak akkor és akkor, ha B
- B akkor és csak akkor, ha A

Az ilyen állításokat kritériumoknak is szokás nevezni.

V. Logikai törvények
Kijelentés logika nyelve.

5. tétel

Def.: Az Ω nyelv valamely A formulája logikai törvény, ha a nyelv minden modelljében minden értékelésnél igaz a formula.

jel.: $\models A$

Mj.: Elnevezése még: Azonosan igaz formula vagy tautológia

Def.: Az Ω nyelv egy A formulája azonosan hamis, vagy kontradikció, ha minden modellben minden értékelésnél hamis.

Def.: Az Ω nyelv egy A formulája kielégíthető, ha van olyan modell, melyben van olyan értékelés, melynél a formula igaz.

DEF: Az Ω nyelv A és B formuláját logikailag ekvivalensnek nevezzük, ha az $A \Leftrightarrow B$ logikai törvény.
($\models A \Leftrightarrow B$)

jelölés: $A \sim B$

Köv: Ha A ekvivalens B ($A \sim B$), akkor A és B logikai értéke megegyezik.

Def: Legyenek $A_1, A_2 \ldots A_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) az Ω nyelv formulái. Ezen formulák Boole-kombinációján értjük azt az A formulát, amely az A_i-kből ($i = 1 \ldots n$) a logikai jelek ($\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$) alkalmazásával áll elő.

Mj: 1) Az A_i-ket a Boole-kombináció komponenseinek hívjuk és ezekben szerepelhetnek kvantorok, de magának az A formulának a képzésében nem.

2) A komponensek logikai értéke meghatározza a formula logikai értékét, hogy hogyan, az értéktáblázattal ábrázolható.

A	B	$\neg$	$(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A$	$\vee$	$\neg B)$
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1

ha a formulában szereplő propozicionális betűk (kijelentés változók) n, akkor az értéktáblázat sorainak a száma 2^n. → ism. variáció

Ha egy értéktáblázatban minden sorban igaz szerepel, akkor a formulát propozicionális tautológiának nevezzük.

Kijelentéslogika nyelve:

- feladata: Boole-kombinációk leírása
- Egy típusú nyelv
- Atomi formulák, propozicionális betűk
- Összetett formulák → Boole-kombinációk

Mj: A hagyományos logikában azt mondják, hogy a kijelentés-logika nyelvén a kijelentéseknek a külső vagy durva szerkezete írható le.
A belső v. finom szerkezetet a predikátumlogika nyelvén tudjuk ábrázolni.

Pl.: Minden négyzet rombusz. jele: P → kijelentéslogika nyelvén

A kvantor feltárása a predikátumlogika nyelvén lesz.

A kijelentéslogika legfontosabb törvényei:

$\underbrace{\wedge, \vee, \neg}$

1) A konjunkció és a diszjunkció kommutatív:
$A \wedge B \sim B \wedge A$; $A \vee B \sim B \vee A$

2) Mindkét művelet idempotens:
$A \wedge A \sim A$; $A \vee A \sim A$

3, Mindkét művelet asszociatív:
$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

4, Disztributív törvények:
$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

5, Eliminációs, elnyelési törvények:

$A \wedge (A \vee B) \sim A$
$A \vee (A \wedge B) \sim A$

6, de Morgan törvények

$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

Mj.: 1) Ha egy törvényben a konjunkció és diszjunkció jeleit felcserélve újabb törvényhez jutunk, akkor azt mondjuk, h. a két törvény egymás duálisa.

2) A konjunkciót és a diszjunkciót definiálhatjuk n ($n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$) esetén.

$n = 1$ A → egytagú konjunkció

$n = 2$ definiálva

$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n :\Leftrightarrow (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$

3) A de Morgan-törvények is kiterjeszthetők n tagra.

Kondicionálisra vonatkozó törvények:

Nem komm, nem asszociatív, nem idempotens. → azonosság törvénye : $\models A \Rightarrow A$

↳ mindig igaz

- kontrapozíció törvénye:

$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$

- láncszabály:

$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ → következtetési séma

- Reductio ad absurdum:

$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$ → indirekt bizonyítás speciális esete.

A kondicionális kifejezhető negáció és diszjunkcióval, illetve negáció és konjunkcióval.

- $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$
(nem az előtag v. az utótag)
- $A \Rightarrow B \sim \neg(A \wedge \neg B)$ → alkalmazva a de Morgan azonosságot.

Bikondicionális:

Nem idempotens, de komm. és asszociatív.

$A \vee \neg A$ (→ mindig igaz : 3. kizárt harmadik törvénye) $:\Leftrightarrow \top$ → szabályigaz
$A \wedge \neg A$ $:\Leftrightarrow$ $\bot$ (ellentmondásmentesség törvénye) → szabályhamis

$A \wedge \top \sim A$
$A \vee \bot \sim A$
$A \wedge \bot \sim \bot$
$A \vee \top \sim \top$
$A \Rightarrow \bot \sim \neg A$
$A \Rightarrow \top \sim \top$
$\bot \Rightarrow A \sim \top$
$\top \Rightarrow A \sim A$

Definíció: Elemi konjunkció: Azt a véges sok tagú konjunkciót, melynek tagjai Boole-kombináció ill. azok negáltjai, elemi konjunkciónak nevezzük.

pl.: $A \wedge \neg A$
$A \wedge C \wedge \neg D$ > elemi konjunkció

Def: Diszjunktív normálformula (DNF):
Véges sok elemi konjunkció diszjunkciója.

Mj.: Értelmezhető az előző fogalmak duálisa, az elemi diszjunkció, és a konjunktív normálformula (KNF)

Tétel: Minden Boole-kombináció komponenseiből képzett DNF illetve KNF alakra hozható.

pl.: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C) \sim$
$((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg C \vee \neg A)) \Rightarrow (B \vee \neg C) \sim$
$\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee \neg A)) \vee (B \vee \neg C)$

Ha zárójel előtt szerepel negációjel ⇒ de Morgan törvényeket alkalmazzuk.

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg C \vee \neg A)) \vee B \vee \neg C \sim$$
$$((\neg A \vee B) \wedge (C \wedge A)) \vee B \vee \neg C \sim$$

Alkalmazzuk a disztributív törvényt.

$$\underbrace{(\neg A \wedge C \wedge A)}_{\perp} \vee (B \wedge C \wedge A) \vee B \vee \neg C \sim$$

$$\underline{\underline{(B \wedge C \wedge A) \vee B \vee \neg C}}$$

n változós formulák:

1) Egyváltozós műveletek:

A	¬A	⊥	⊤
1	0	0	1
0	1	0	1

n változó van $\Rightarrow$ 2^n sora van

oszlopainak száma 2^{2^n}

16 művelet lesz

2) Kétváltozós műveletek

16 db van, lsd.: jegyzet.

2 : $\perp$, $\top$

4 : A, $\neg A$, B, $\neg B$

5 : $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$

5 : (ezek tagadása

| kizáró vagy

Ha adott egy formula értéktáblázatának egy oszlopával, akkor speciális DNF illetve KNF alakban fel tudjuk írni a formulát.

Példa:

A	B	C	?
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

$$(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C)$$

1.) Válasszuk ki az igaz sorokat!

- Ez a formula jellemzi az értéktáblázatot. Ez DNF.
- Ha a hamis sorokat választjuk, diszjunkciót kell írnunk és KNF-et kapunk.

Kijelentéslogika gyakorlati alkalmazása:

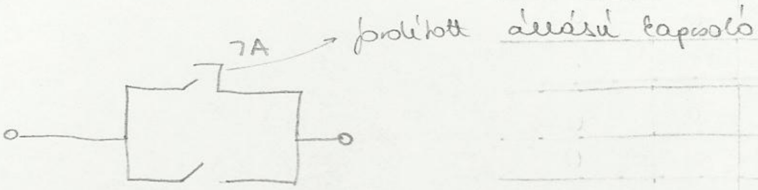
Logikai áramkörök:

Megfeleltetés: kijelentés logikai fogalmak	áramkörök
A: 1 / 0	kapcsoló: zárt / nyitott
$\neg A$	fordított állású kapcsoló
$\land$	soros kapcsolás
$\lor$	párhuzamos kapcsolás
Dnf, Knf	áramkör

Kétirányú a kapcsolat:

1) Logikai formulák ábrázolása:

Pl.: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$



2) Bonyolult áramkörnek elkészítjük a formuláját, majd ezt logikai törvények segítségével egyszerűbb alakra hozzuk, majd elkészítjük az egyszerűbb formulának megfelelő áramkört.

Példa alkalmazásra: Egy vasúti kocsiban 3 kapcsoló van, valamint kis- és nagylámpa. A kislámpa akkor ég, ha pontosan egy utas kapcsol, a nagylámpa, ha legalább 2 utas kapcsol. Tervezzük meg az áramkört!

A B C

$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg A \wedge \neg B)$