6., A tiszta predikátumlogika nyelve:

Példa: Minden négyszög deltoid. P

$\forall x\,(N(x) \Rightarrow D(x))$

A belső finom szerkezet, azaz a kvantoros struktúra leírására szolgál a tiszta predikátumlogika nyelve.

Egy típusú nyelv; konstans, fgvjel nincs; szintű leges változójú predikátum szimbólumok az atomi predikátumok.

Logikai törvények:

I) Üres kvantorok eszte:

$\forall x A \sim A$ $\qquad$ $\exists x A \sim A$

ha A-ban az x nem paraméter. (ne forduljon elő)

II) Egynemű kvantorok cseréje:

$\forall y \forall x A \sim \forall y \forall x A$

$\exists y \exists x A \sim \exists y \exists x A$

azonos típusú kvantorok felcserélhetők.

III) Kvantorcsere kondicionálisban:

$\models \forall x A \Rightarrow \exists x A$

logikai törvény

Példa: Adott egy 6 fős társaság. $J(x;y) :\Leftrightarrow$ x ismeri y-t.

Valaki mindenkit ismer. $\rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \models \exists x \forall y\ J(x,y) \\ \Downarrow \\ \forall y \exists x\ J(x,y) \end{array}}$

Mindenkit ismer valaki.

pl. házaspárok

Különböző típusok nem cserélhetők fel minden esetben.

10) Kvantorok de Morgan törvényei:

$\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$:

$\neg \exists x A \sim \forall x \neg A$:

Kvantorral kezdődő formulát úgy tagadunk, h. vesszük a másik kvantort, és a kvantor mögötti formula negáltját.

Mj.: Ezek a törvények is mutatják azt, hogy az univerzális kvantor tekinthető a konjunkció, az egzisztenciális kvantor, a diszjunkció általánosításának.

Legyen az alaphalmaz véges. $U := \{ a_1, \dots a_n \}$

$\forall x A \sim A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

$\exists x A \sim A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

11) Kvantorok egyoldali kiemelése:

! Itt az x nem paraméter A-ban!

$A \wedge \forall x B(x) \sim \forall x (A \wedge B(x))$

$A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$

$A \wedge \exists x B(x) \sim \exists x (A \wedge B(x))$

$A \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B(x))$

Konjunkcióból és diszjunkcióból a feltétel mellett kvantor kiemelhető.

$A \Rightarrow \forall x B(x) \sim \forall x (A \Rightarrow B(x))$

$\exists x B(x) \Rightarrow A \sim \forall x (B(x) \Rightarrow A)$

Kondicionálisban utótagból azonos típusú kvantor, előtagból a másik kvantor emelhető ki.

VI) Kvantorok kétoldali kiemelése:

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \sim \forall x (A(x) \wedge B(x))$

$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$

$\models \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$

$\models (\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

Konjunkcióból az univerzális kvantor, diszjunkcióból a egzisztenciális kvantor emelhető ki.

Logikai törvények igazolása:

Kijelentéslogikai formulák esetén van egyszerű eljárás, és ez az igazságtáblázat.

Kérdés? A predikátumlogikai formulákhoz létezik-e ilyen eljárás?

Válasz: Church-tétele: Nem létezik a predikátumlogikában olyan egyszerű eljárás, amellyel bármely formuláról el tudnánk dönteni, h. törvény-e vagy sem.

Különböző módszerek léteznek:

$\neg \forall x\, A(x) \sim \exists x \neg A(x)$

igaz, ha $\forall x\, A(x)$ hamis

A nem üres alaphalmaznak van legalább egy olyan eleme, ahol $A(a)$ hamis. Minden más esetben hamis.

igaz, ha $\exists$ legalább egy olyan alaphalmazbeli a elem, amelyre $\neg A(a)$ igaz.

$A(a)$ hamis

Logikai törvény, mert a kettő egyenértékű

$\models \neg \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

Legtöbbször azt kell megmutatnunk, h. valamely formula nem logikai törvény.

Pl.: $\not\models \underbrace{((P \Rightarrow Q) \wedge Q)}_{1} \Rightarrow P$ $\downarrow$ 0 → error hamis

$\underbrace{\underbrace{\downarrow 1 \downarrow}_{\substack{0 \quad 1 \\ 1}}}_{1}$

Ez nem logikai törvény → az előtag igaz, utótag hamis.

$$\underbrace{(\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))}_{1} \Rightarrow \underbrace{\exists x\, (A(x) \wedge B(x))}_{0}$$

$\exists x\, A(x) = 1$

$\exists x\, B(x) = 1$

$a \in U$ $\boxed{A(a) = 1}$

$b \in U$ $\boxed{B(b) = 1}$ > nem kell egyforma betűvel jelölni

Minden $A(x) \wedge B(x)$ hamis

$\underbrace{A(a)}_{1} \wedge \underbrace{\boxed{B(a)}}_{0}$ hamis

ehhez hamis, mert $B(b)$ volt igaz.

Az értékelésnél a formula hamis

Szöveges értékelés:

Ha létezik páros szám ($A(x)$) és létezik páratlan szám ⇒ létezik olyan szám, amelyik páros és páratlan.

Mj.: Vannak olyan speciális prédikátumlogikai formulák, amelyeknél a vizsgálat történhet egyszerű eljárással, ezt az egyszerű formulák.

Def.: Nyílt egyszerű formuláknak nevezzük az egyváltozós predikátumokat, ill. azokat logikai jelekkel történő összekapcsolását.

Pl.: $Q(x)$ Egyszerű form.

$P(x) \vee P(x)$

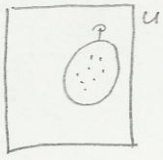
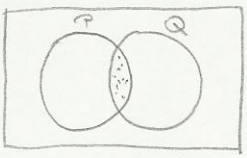
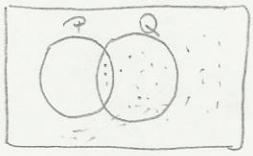
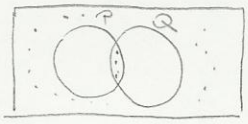
Def.: Egyszerű zárt formulának nevezzük azokat a formulákat, melyeket az egyszerű nyitottakból kvantorok alkalmazásával, vagy úgy kapunk, hogy a prédikátumban a változó helyére egy alaphalmazbeli elemet írunk. Ez utóbbit konkretizálásnak nevezzük.

Pl.: $P(a)$ → ebből adódik; → alaphalmazbeli elem

$\forall x \, (A(x) \vee B(x))$

~~Hogy~~ ~~az~~ A zárt formulák kijelentésszerűek formalizálnak.

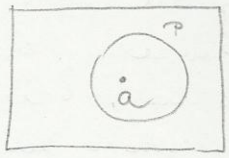
Megfeleltetés hozható létre az egyszerű formulák és a halmazelméleti fogalmak között.

Egyszerű f.	Halmazelm. f.
• nyílt f.	• adott U alaphalmaz részhalmazai ($U \neq \emptyset$ részhalm.)
$P(x)$	 igazsághalmaz
$\neg P(x)$	 $\overline{P}$, komplementer
$P(x) \wedge Q(x)$	 $P \cap Q$
$P(x) \vee Q(x)$	$P \cup Q$
$P(x) \Rightarrow Q(x)$	 $\overline{P \setminus Q}$
$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$	 $\overline{(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)}$

· zárt formulákhoz halmazelméleti állításokat fűzünk meg.

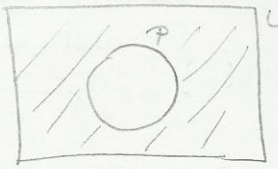
<u>Egyrétű f.</u> <u>Hc. fogalmak</u>

$P(a)$ szigó ennek a vadászat



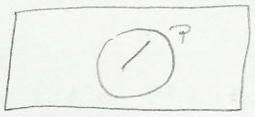
$a \in P$

$\forall x P(x)$



$\overline{P} \neq \emptyset$

$\exists x P(x)$

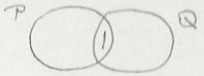


$P \neq \emptyset$

<u>Mj.:</u> Hagyományos logikában központi helyet foglalnak el a kategorikus kijelentések, amelyek egyréű formulával, ill. Venn-diagrammal ábrázolhatók.

1., Általános állító : minden P, Q $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ affirmo-állítás a $P \setminus Q = \emptyset$

2., Részleges állító : van P, ami Q $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ affirmo i $P \cap Q \neq \emptyset$



3., Általános tagadó: minden P nem Q $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ nego e $P \cap Q = \emptyset$

4., Részleges tagadó : van P, ami nem Q. $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$ o $P \setminus Q \neq \emptyset$

A logikai törvények néhány alkalmazása

Def.: A Ω nyelv azon formuláját, amely

$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A$ alakú, ahol Q_i $(i = 1 \dots n)$ kvantorok, A pedig kvantormentes formula PRENEX formulának nevezzük.
Speciálisan: ha $n=0$, azaz a formula kvantormentes, azt is prenex formulának nevezzük.

Def: Egy A formula prenex alakjának nevezzük azt a B formulát, amely prenex formula és az A-val ekvivalens. $(A \sim B)$

Tétel: minden formula prenex alakra hozható

Példa:

$$((\neg \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \vee (\forall x \forall y R(x,y)) \Rightarrow \exists z P(z)) \sim$$

~~A tényleg~~

1) A formulát változó kizta alakra hozzuk.

$$(\neg \forall x P(x) \wedge \exists u Q(u)) \vee (\forall v \forall y R(v,y) \Rightarrow \exists z P(z)) \sim$$

2) Ha van negáció a kvantor előtt, akkor de Morgan törvények alkalmazásával „bevisszük a kvantort"

3) alkalmazzuk a kvantorkiemelési törvényeket!

$$\exists x (P(x) \wedge \exists u Q(u)) \vee \exists v \exists y \exists z (R(v,y) \Rightarrow P(z))$$

(egyoldali kvantorkiemelés alkalmazható, most most nincs szabad változó)

Kondicionálásra vonatkozó kvantorkiemelés

4) Egyoldali kvantorkiemelés alapján:

$$\exists x \exists u \exists v \exists y \exists z \left((\neg P(x) \wedge Q(u)) \vee (R(v,y) \Rightarrow P(z)) \right)$$

Mj.: A kvantorok sorrendje eltérő lehet, mert a kiemelés sorrendje változtatható.

A logikai jelek ~~sor~~ sorrendje meg kell, h. egyezzen az eredeti formulában levő sorrenddel.

7. tétel

7. logikai következmény

Def.: jelölje Γ (nagy gamma) az Ω nyelv véges sok formuláját és legyen A szintén a nyelv egy formulája. Azt mondjuk, h. a Γ-beli formuláknak logikai következménye az A, ha a nyelv minden interpretációjában minden értékelésnél, amikor a Γ-beli formulák igazak $\Rightarrow$ az A is igaz.

$\Gamma \models A$ gammának következménye az A.

$$\frac{\left.\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{array}\right\} \Gamma}{A}$$

premisszák ↓ kútfők

konklúzió tárgyak

Álljon a Γ $B_1, B_2 \dots B_n$-ből.

Tétel: $\underbrace{B_1, \dots B_n}_{\Gamma}$ formulának arra és csak arra következménye az A, ha B_1 konjunkció $\dots B_n \Rightarrow A$ logikai törvény

$$(B_1 \wedge B_2 \dots \wedge B_n) \Rightarrow A$$

BIZ: lsd. jegyzet

1) Ha következmény → tétel,
2) Ha tétel → következmény

Mj.: 1) Több premissza helyett használhatunk egyet, a premisszák konjunkcióját.

2) A feladatok megoldásánál használjuk az eredeti definícióval ekvivalens alábbi megfogalmazást: A B formulának következménye az A, ha nem létezik olyan értékelés, amelynél a B igaz, az A pedig hamis.

3) Szöveges következtetésnél először formalizálunk, majd az így kapott sémát vizsgáljuk.

4) Ha a formulák mindegyike kijelentéslogikai formula ⇒ a definíció egyenértékű a következővel. A premisszáknak következménye a konklúzió, ha elkészítve a közös igazságtáblázatot, a konklúzió legalább azokban a sorokban igaz, ahol a premisszák mindegyike igaz.

5) Ha a formulák mindegyike egyváltozós formula, akkor Venn-diagrammal vizsgálható. Így helyes a következtetés, ha a premisszák Venn-diagramja tartalmazza a konklúzióját.

Pl.: $\overbrace{\text{Ez a szám osztható 6-tal}}^{H}$, vagy $\overset{O}{\text{öttel}}$.
Ez a szám nem osztható hattal.

Ez a szám osztható 5-tel.

$$\frac{\begin{array}{c} H \vee O \\ \neg H \end{array}}{O}$$

1; mivel csak kijelentéslogikai ... 4. pont alapján

H	O	H∨O	¬H
1	1	1	~~0~~
1	~~0~~	1	~~0~~
~~0~~	$\boxed{1}$	1	1
~~0~~	~~0~~	~~0~~	1

igaz a konklúzió.

mechanikus, de hosszadalmas.

2; indirekt módszer 2. pont alapján

H∨O	1
¬H	1
O	~~0~~

ellentmondás

Tfh. ∃ olyan értékelés, h. a premisszák igazak, a konklúzió hamis.

O : 0
H : 0

nem létezik olyan értékelés, azaz a következtetés helyes.

3; a tétel alapján:

$\models (((H \vee O) \wedge \neg H) \Rightarrow O)$ → be kell látni, h. mindig igaz.

$((H \vee O) \wedge \neg H) \Rightarrow O \sim$

a logikai törvények alkalmazásával alakítjuk a formulát
de Morgan

$\neg((H \vee O) \wedge \neg H) \vee O \sim$

$\underbrace{\neg(H \vee O)}_{A} \vee \underbrace{H \vee O}_{A} \sim$

$\sim \neg A \vee A \sim \underline{\underline{T}}$

A gyakorlatban nem vesszük le mindig a leggyakrabban előforduló sémákat, ezek a nevezetes következtetési sémák.

(A VIZSGÁN bármelyikről be kell tudni bizonyítani, hogy helyes!)

- Modus ponens:

$$\frac{P \Rightarrow Q \qquad P}{Q}$$

- Kontrapoziciós séma:

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg Q \Rightarrow \neg P}$$

- Lánc-szabály:

$$\frac{P \Rightarrow Q \qquad Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

- Diszjunktív szillogizmus:

$$\frac{P \vee Q \qquad \neg P}{Q}$$

Indirekt sémák

1) Reductio ad absurdum (ellentmondásra vezetés)

$$\frac{\neg P \Rightarrow Q \qquad \neg P \Rightarrow \neg Q}{P}$$

Cáfoló alak ($\neg P$ helyett p-t írunk)

$$\frac{\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

$$\frac{\begin{array}{c} Q \\ \neg P \Rightarrow \neg Q \end{array}}{P}$$

← csak az utótagot állítjuk

cáfoló alak

$$\frac{\begin{array}{c} Q \\ P \Rightarrow \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \neg P \Rightarrow \neg Q \\ \neg Q \end{array}}{P}$$

cáfoló alak

$$\frac{\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

Kategorikus szillogizmusok:

A hagyományos logika központi problémája a kategorikus szillogizmusok vizsgálata

Ezek olyan sémák, melyekben a két premissza, és a konklúzió is kategorikus állítás

NEM KELL TUDNI!

I.	II.	III.	IV.
$\alpha(P,Q)$	$\alpha(P,Q)$	$\alpha(Q,P)$	$\alpha(Q,P)$
$\beta(R,P)$	$\beta(P,R)$	$\beta(R,P)$	$\beta(P,R)$
$\gamma(R,Q)$	$\gamma(R,Q)$	$\gamma(R;Q)$	$\gamma(R,Q)$

$4^3 \cdot 4$
↓
256

Kérdés? Ebből hány helyes?

A középkorban a 256-ból 19 helyeset találtak, ebből valóban csak 15 helyes, a többi 4 kiegészítéssel lesz helyes.