FELADATOK

Kondicionális:

1)

Egy tanuló leír a füzetébe egy természetes számot. Erre vonatkozik az alábbi kijelentés: „Ha a leírt szám osztható hattal, akkor osztható hárommal is."

A) Igaz-e minden természetes számra?
B) Mi a kijelentés megfordítása? Igaz-e az minden természetes számra?
C) Mi az eredeti kijelentés kontrapozíciója? Igaz-e ez minden természetes számra?

D) Fogalmazzuk át az eredetit 1) csak akkor, 2) szükséges feltétele, 3) elégséges feltétele kifejezések segítségével.

Mego

Ha egy valamire vonatkozik → Kijelentéslogika nyelvén.

osztható 6-tal   osztható 3-mal

A) $H \Rightarrow A$

igaz

B) $A \Rightarrow H$

hamis

C) $\neg A \Rightarrow \neg H$ Ha nem osztható 3-mal, nem osztható 6-tal sem.

igaz

D) 1) a leírt szám csak akkor osztható hattal, ha osztható 3-mal is.

2) A hattal való oszthatóságnak szükséges feltétele a 3-mal való oszthatóság.

3) A hattal való oszthatóság elégséges feltétele a 3-mal való oszthatóságnak.

GYAK { Tanár 4sz-et rajzol. Ha a rajzolt 4sz rombusz ⇒ az tengelyesen szimmetrikus.

Negáció:

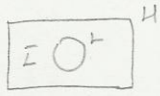
Mi a politikai meggyőződése annak, aki ezt mondja?

„Nem értek egyet az antifasiszta mozgalom üldözőinek megrendszabályozására intézkedések elszabotálásával."

2) Tekintsük a logikai készletet! Az alábbi állítások logikai-készletelemek mely részhalmazaira igazak?

a) Lukas v. nem lukas:

a) $L \cup \neg L$



$L \cup \bar{L} = H$

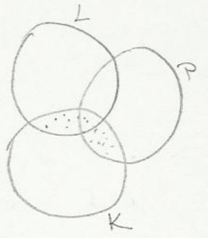
b) Lukas, vagy piros és kör:

$L \cup (P \wedge K)$

$L \cup (P \cap K)$

c) $(L \cup P) \wedge K$ ~*

$(L \cup P) \cap K$



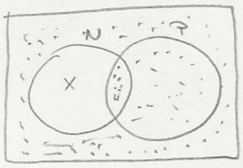
*~ $(L \wedge K) \cup (P \wedge K)$

$(L \cap K) \cup (P \cap K)$

d; $N \Rightarrow P$

nagy piros

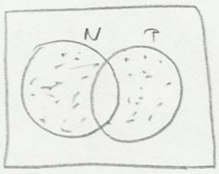
$1 \Rightarrow 1$	1
$0 \Rightarrow 1$	1
$0 \Rightarrow 0$	1
$1 \Rightarrow 0$	0



$\overline{N \setminus P}$

e; Akkor és csak akkor nagy, ha nem piros

$N \Leftrightarrow \neg P$		
1	1	$p=0$
0	0	$p=1$



$N \setminus P$

$P \setminus N$

$(N \setminus P) \cup (P \setminus N)$

Bizonyítható, hogy:

$\neg(N \Leftrightarrow P) \sim \neg N \Leftrightarrow P \sim N \Leftrightarrow \neg P$

FORMALIZÁLÁS

1) Ha a gyerek holnap még lázas (L) v. erősen köhög (K), és megtaláljuk (M) az orvost, akkor elhívjuk (H).

kijelentéslogika nyelvén:

$((L \lor K) \land M) \Rightarrow H$

Gyakorlás

Kijelentés logika nyelvén formalizálunk:

1. ha a csatár most^{G} gólt rúg, akkor megnyerjük^{M} a mérkőzést, de ha nem rúg most gólt, akkor nem nyerjük meg, de ha nem nyerjük meg, akkor kiesünk^{K} és nem jutunk be^{B} a tizenhatos döntőbe.

G: a csatár gólt rúg
M: megnyerjük a mérkőzést
K: kiesünk
B: bejutunk a döntőbe

$$(G \Rightarrow M) \wedge (\neg G \Rightarrow \neg M) \wedge (\neg M \Rightarrow (K \wedge \neg B))$$

≀ ekvivalens

$$\underbrace{(G \Rightarrow M) \wedge (M \Rightarrow G)} \wedge (\neg M \Rightarrow (K \wedge \neg B))$$

$$(M \Leftrightarrow G) \wedge (\neg M \Rightarrow (K \wedge \neg B))$$

↓

Akkor és csak akkor nyerjük meg a mérkőzést, ha a csatár gólt rúg.

2. HF. János akkor és csakis akkor mérges, ha Klári akkor égeti oda a rántást, ha ott van az anyósa.

3. Éva szőke, mindazonáltal nekem nem tetszik, annak ellenére, hogy a szőkéket kedvelem.

S: Éva szőke

T: Éva tetszik nekem

K: Kedvelem a szőkéket.

mindazonáltal - és

de - és

annak ellenére - és

S T K

$\cancel{S \wedge T\,T}$ $\quad S \wedge \neg T \wedge K$

4. A királynő megölni nem kell félnetek jó lesz ha mindenki beleegyezik én nem ellenzem.

A vesszők kivevésével változik a forma.

5. A másodfokú egyenlet megoldhatóságának elegendő feltétele, hogy a diszkrimináns pozitív legyen

D: A másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív

M: A másodfokú egyenlet megoldható.

$$D \Rightarrow M$$

6. Lehetetlen, hogy állásod van, keresetetd meg nincs.

A: Van állásod.

K: Van keresetetd.

$$\neg(A \wedge K) \sim \neg A \vee K \sim A \not\Rightarrow K$$

Predikátumlogikai feladatok:

1. Jelentse $F(x,y) \Leftrightarrow x$ fia y-nak predikátumot az emberek halmazában.
Hat. meg az alábbiak logikai értékét!

a.) $\forall x \exists y\, F(x,y)$

b.) $\exists y \forall x\, F(x,y)$

c.) $\forall y \exists x\, F(x,y)$

a.) x fia y-nak: mindenki fia valakinek
a formula igaz, ha $\forall x$-re igaz és y-ra is
Ez hamis, van olyan elem amire az állítás nem teljesül.

b.) Valakinek mindenki a fia. Hamis

c.) Mindenkinek van fia. Hamis

Formalizálás:
1. Minden holló fekete.
1. megadjuk az alaphalmazt:
$U = \{\text{hollók}\}$ $\quad$ ez bővebb halmaz! $U := \{\text{madarak}\}$

2. milyen predikátumok szerepelnek:
$F(x) :\Leftrightarrow x$ fekete $\quad$ $H(x) :\Leftrightarrow x$ holló
$F(x) \Leftrightarrow x$ fekete

$\forall x\, F(x)$ $\quad$ Minden madárra teljesül, ha holló, akkor fekete.
$\forall x\, (H(x) \rightarrow F(x))$

3. kiírjuk a kvantort, ha van benne (esetleg átfogalmazással):

2. Van fehér holló.

$U := \{\text{hollók}\}$

$F(x) :\Leftrightarrow x$ fehér

$\exists x\, F(x)$

$U := \{\text{madarak}\}$

$H(x) :\Leftrightarrow x$ holló

$F(x) :\Leftrightarrow x$ fehér

$\exists x\big(F(x) \wedge H(x)\big)$

3. Van olyan torony, amelyik nem függőleges.

$U := \{\text{épületek}\}$ ez adott.

$T(x) :\Leftrightarrow x$ torony

$F(x) \Leftrightarrow x$ függőleges

$\exists x(T(x) \wedge \neg F(x))$ ez részleges tagadó állítás

4. Pál levelet adott Paulának.

$U := \{\text{emberek}\}$

$L(x,y) \Leftrightarrow x$ levelet ad y-nak.

p : Pál

a : Paula

$L(p,a)$

5. Az anyák szeretik a fiaikat.

$U := \{\text{emberek}\}$

$A(x,y) :\Leftrightarrow x$ anyja y-nak

$S(x,y) :\Leftrightarrow x$ szereti y-t

$F(x) \Leftrightarrow x$ férfi

$$\forall x \forall y\Big(\big(A(x,y) \wedge F(y)\big) \Rightarrow S(x,y)\Big)$$

50

6. Senki sem tökéletes.

$U = \{\text{emberek}\}$

$T(x) \iff x$ tökéletes

De Morgan alapján ekvivalensek

$\forall x \; \neg T(x)$ ✓ vagy $\neg \exists x \, T(x)$

7. Némely rokonom külföldön él.

$U := \{\text{emberek}\}$

$R(x) \iff x$ rokonom

$K(x) \iff x$ külföldön él

$\exists x \left(R(x) \land K(x) \right)$ ✓

8. Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

$U = \{\text{emberek}\}$

$V(x) \iff x$ vermet ás másnak

$E(x) \iff x$ beleesik a verembe

$\forall x \left(V(x) \Rightarrow E(x) \right)$ ✓

9. Nincsen rózsa tövis nélkül.

$U = \{\text{virágok}\}$

$R(x) \iff x$ rózsa

$T(x) \iff x$ tövises

$\neg \cancel{\exists x \left(R(x) \land T(x) \right)}$ $\quad \neg \exists x \left(R(x) \land \neg T(x) \right) \sim$

vagy $\sim \forall x \left(R(x) \Rightarrow T(x) \right)$

átalakításokkal bizonyítható

10. $U = \{$valós számok$\}$

a) $\forall$ szám négyzete nem negatív.

$S(x) \Leftrightarrow x$ négyzete negatív

$\cancel{\forall x. \neg S(x)}$ $\qquad \forall x (x^2 \geq 0)$

b) $\forall$ 0-tól különböző szám 0-ik hatványa 1.

$O(x) \Leftrightarrow x$ 0-tól különböző szám

$H(x) \Leftrightarrow x$ 0. hatványa 1.

$\forall x \left(O(x) \land H(x) \right)$ $\qquad \forall x \left(x \neq 0 \Rightarrow x^0 = 1 \right)$

c) $\exists$ olyan szám, amelyiknek a négyzete 7.

$S(x) \Leftrightarrow x$ négyzete 7.

$\cancel{\exists x \; S(x)}$ $\qquad \exists x \left(x^2 = 7 \right)$

11. Kollégiumi szobában 4 hallgató lakik.

Legyen a köv. predikátum:

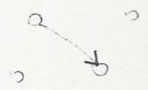
$E(x,y) \Leftrightarrow x$ elítéli y-t.

Formalizáljuk és szemléltessük a következőket.

a) Valaki elítél vki mást.

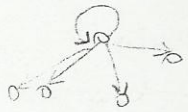
b) Valaki elítél mindenkit.

a)



$\exists x \; \exists y \left(E(x,y) \land x \neq y \right)$

b)



$\exists x \forall y \; E(x,y)$

Kijelentéslogikai következtetések:

1. Ha Lajos matekot^{M} tanít, akkor ábrázoló^{A} geometriát vagy fizikát^{F} is tanít.

Lajos nem tanít ábrázolót.

Lajos matekot vagy ábrázolót vagy fizikát tanít.

Lajos fizikát tanít.

Helyes-e a következtetés?

a) formalizálni kell: a kijelentés logika nyelvén (nincs benne kvantor)

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{Tfh.} \\
M{:}0 \Leftarrow & \overset{0}{M} \Rightarrow \overset{0}{(\overset{0}{A} \vee \overset{0}{F})} & 1 \\
A{:}0 \Leftarrow & \neg A & 1 \\
 & \underline{\overset{}{\underset{0}{M}} \vee \underset{0}{A} \vee \underset{0}{F}} & (1 \quad 0) \text{ ellentmondás, tehát} \\
F{:}0 \Leftarrow & F & 0 \quad \text{a következtetés helyes.}
\end{array}
$$

2. Ha a kísérleti patkányt egy labirintusba^{L} tesszük, és az éhes^{E}, akkor vagy megismeri^{M} a labirintust, vagy képes megtalálni^{K} az élelmet.

Ha a kísérleti patkány megismeri a labirintust, akkor képes megtalálni az élelmet.

A kísérleti patkányt a lab. tesszük, és nem találja az élelmet.

A kísérleti patkány nem éhes. Helyes-e?

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{Tfh.} \\
 & \overset{1}{(\overset{1}{L} \wedge \overset{1}{E})} \Rightarrow \overset{0}{(\overset{0}{M} \vee \overset{0}{K})} & \underline{1 \quad 0}, \text{ ellentmondás,} \\
M{:}0 \Leftarrow & \overset{0}{M} \Rightarrow \overset{0}{K} & 1 \quad \text{a következtetés helyes.} \\
L{:}1 \wedge K{:}0 \Leftarrow & \underline{L \wedge \neg K} & \underline{1} \\
E{:}1 \Leftarrow & \neg E & 0
\end{array}
$$

3.

	Ifh.
$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	1
$P \Rightarrow Q$	1
$R \Rightarrow P$	1
$\neg(\underbrace{P \vee R}_{1})$	0

PVR 3 féleképpen lehet igaz

1) P : 0

R : 1

$\overset{1}{R} \Rightarrow \overset{0}{P}$ $\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$ ellentmondás

helyes

2) P : 1

R : 0

$\overset{1}{P} \Rightarrow \overset{1}{Q}$ 1

$\overset{0}{R} \Rightarrow \overset{1}{P}$ 1

$\overset{1}{P} \Rightarrow (\overset{1}{Q} \Rightarrow \overset{0}{R})$ $\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$ ellentm.

helyes

Q = 1

3) P: 1

R: 1

$\overset{1}{P} \Rightarrow (\overset{1}{Q} \Rightarrow \overset{1}{R})$ 1

$\overset{1}{P} \Rightarrow \overset{1}{Q}$ 1

$\overset{1}{R} \Rightarrow \overset{1}{P}$ 1

nincs ellentmondás

A következtetés helytelen.

(Ha egy séma vizsgálatánál több értékelési lehetőség van és az elsőnél ellentmondáshoz jutunk nem szabad leállni, mert a többi értékelésnél még lehet olyan, amelynél a premisszák igazak, a konklúzió hamis, azaz helytelen a séma.)

(Ha már az első lehetőség vizsgálatánál nem jutunk ellentmondáshoz, akkor biztos hogy helytelen a séma, a többi lehetőséget nem kell megvizsgálni.)

54

4. $\overset{0}{P} \Rightarrow \overbrace{(\overset{0}{Q} \Rightarrow \overset{1}{R})}^{1}$ 1

$\overset{0}{P} \Rightarrow \overset{0}{Q}$ 1

$P \Rightarrow P$! mindig igaz, nem kell foglalkozni vele, logikai tönedy 1

$\underbrace{(P \vee R)}_{1} \Rightarrow \underset{0}{Q}$ 0

Q : 0
P : Q
R : 1

nincs ellentmondás, találtunk olyan értékelést akol a premisszák igazak a konklúzió hamis → séma helytelen.

5.

1. $\overset{0}{P} \vee \overset{\text{lehet } 1 \text{ v. } 0}{(Q \Rightarrow R)}$ 1

2. $\overset{\text{lehet } 1 \text{ v. } 0}{(Q \wedge \neg R)} \vee \overset{1}{S}$ 1

3. S 1

P 0

R : 1
Q : 1
P : Q
S : 1

nem találtunk ellentmondást, így a séma nem helyes.

1. Legyen Q : 1 R = 1
2. Q : 1 ¬R : 0

Milyen konklúziót vonhatunk le az alábbi premisszákból?