(1)

Ha az órám jól jár és idejében jön az autóbusz, akkor megérkezem a gyakorlat megkezdése előtt.
Idejében jön az autóbusz mégsem érkezem meg a gyakorlat megkezdése előtt.

a $\exists$ csak hamis lehet

$$
\begin{array}{ll}
(\overset{0}{\exists} \wedge \overset{1}{A}) \Rightarrow \overset{0}{M} & 1 \text{ (igaz)} \qquad \exists : 0 \\
A \wedge \neg M & 1 \qquad A : 1 \\
\hline
A \wedge \neg M \wedge \neg \exists & 1 \qquad M : 0
\end{array}
$$

$A : 1$

$M : 0$

A konklúzió az, hogy nem jár jól az órám

(2) Ha az aratást $\overbrace{\text{nem fejezzük be idejében}}^{\neg B}$ akkor $\overbrace{\text{sok szem kipereg}}^{K}$.
Ha $\overbrace{\text{sok szem kipereg}}^{K}$ akkor $\overbrace{\text{nem teljesítjük a tervet}}^{\neg T}$.
Ha $\overbrace{\text{nem teljesítjük a tervet}}^{\neg T}$, akkor $\overbrace{\text{nem kapunk prémiumot}}^{\neg P}$.
Ha $\overbrace{\text{nem kapunk prémiumot}}^{\neg P}$ akkor $\overbrace{\text{nem vesszük meg a rádiót}}^{\neg V}$.
Megvesszük a rádiót.

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \neg B \Rightarrow K \\ K \Rightarrow \neg T \end{array}\right\} \neg B \Rightarrow \neg T \quad \text{láncszabály miatt} \\
\left.\begin{array}{l} \neg B \Rightarrow \neg T \\ \neg T \Rightarrow \neg P \end{array}\right\} \neg B \Rightarrow \neg P \\
\left.\begin{array}{l} \neg B \Rightarrow \neg P \\ \neg P \Rightarrow \neg V \end{array}\right\} \neg B \Rightarrow \neg V \\
\neg P \Rightarrow \neg V \\
V \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\neg B \Rightarrow \neg V \\
V \\
\hline
B
\end{array}
$$

ez egy indirekt séma

Befejezzük az aratást ez a konklúzió.

(3) Ha elmegyünk Tihanyba akkor Füredre (F) is elmegyünk, de csak akkor.
Ha nem megyünk Almádiba (A) akkor Füredre sem megyünk.
Az biztos, hogy nem megyünk Almádiba és Tihanyba is, de az biztos, hogy Almádiba vagy Tihanyba megyünk.

$$T \Leftrightarrow F \qquad \overset{0}{T} \Leftrightarrow \overset{0}{F} \quad 1$$

∇ kizáró vagy $\qquad \neg A \Rightarrow \neg F \qquad \overset{0}{F} \Rightarrow \overset{1}{A}$ 1 (a kontrapozíciós törvény miatt) $\quad$ 2 féleképpen lehet 3

Zsagalkin $\qquad \underline{A \nabla T} \qquad \underline{\overset{1}{A} \Leftrightarrow \neg\overset{1}{T} \; 1} \quad 2$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B \sim A \Leftrightarrow \neg B$$ ez alapján

Konklúzió : $A \wedge \neg T \wedge F$ / Sem Tihanyba, sem Füredre nem megyünk, hanem Almádiba

(a) $A : 1$
$T : 0$
$F : 0$

(b) $A : 0$
$T : 1$

$$\overbrace{\overset{1}{T} \Leftrightarrow \overset{0}{F}}^{0} \quad 1$$
$$\overset{0}{F} \Rightarrow \overset{0}{A} \quad 1$$
$$\overset{0}{A} \Leftrightarrow \overline{\neg T} \quad 1$$

A másik értékelés nem lehet mert nem minden premissza igaz.

Pl: (1) Ha férfi a tettes akkor kistermetű.
(2) Ha kistermetű a tettes akkor az ablakon mászott be.
Férfi a tettes vagy legalább is férfi ruhát hordott.
Ha férfi ruhát hordott, akkor – feltéve, hogy hiteles a szemtanu vallomása – az ablakon mászott be.
A tettes nem az ablakon mászott be.
Mi a konklúzió?

lehetőképpen
i– lehet
ír–

liba

Predikátum logikai feladatok

(4) Minden négyzet piros.
Minden lukas négyzet

Minden lukas piros.

Formalizáljuk
$N(x)$ = x négyzet
$P(x)$ = x piros
$L(x)$ = x lukas

$$\forall x(N(x) \Rightarrow P(x)) \quad a \quad N \setminus P = \emptyset$$
$$\forall x(L(x) \Rightarrow N(x)) \quad a \quad L \setminus N = \emptyset$$

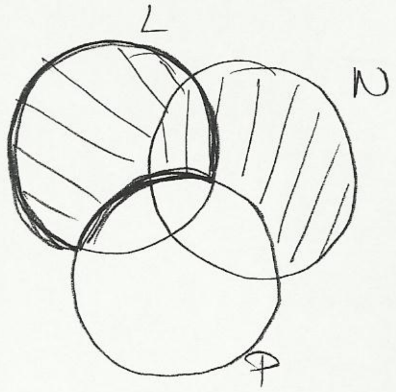
$$\forall x(L(x) \Rightarrow P(x)) \quad a \quad L \setminus P = \emptyset$$

- Egyrendű formulák szerepelnek-e?
  ha egyrendűek akkor alkalmazható a Venn-diagram. (Azért egyrendűek, mert egy változó szerepel csak)

- kategorikus állítások?

Először az üreshalmazokat jelöljük a diagrammon!

A konklúziót sosem ábrázolom a Venn-dn

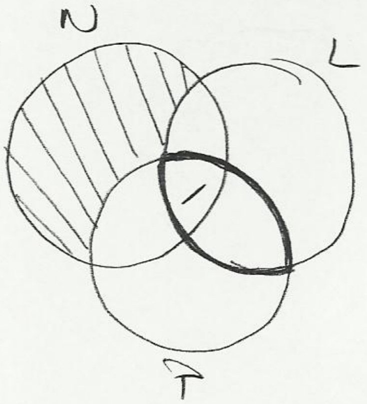


A következtetés helyes.
Le kell tudni olvasni azt, hogy $L \setminus P = \emptyset$

(5) Minden nagy lukas.
Van piros, amelyik nagy.
Van olyan piros, amelyik lukas.

$$
\begin{array}{lll}
\forall x(N(x) \Rightarrow L(x)) & a & H \setminus L = \emptyset \\
\cancel{\forall}\exists x(P(x) \wedge N(x)) & i & P \cap N \neq \emptyset \\
\hline
\exists x(P(x) \wedge L(x)) & i & P \cap L \neq \emptyset
\end{array}
$$

Egyszerű, kategorikus állítás.
i: részleges állító



Ha valamelyik részhalmazban nincs jel, az azt jelenti, hogy a premisszák nem adnak róla információt.

P
Aki másnak vermet ás maga esik bele.
Q
Zebulon másnak vermet ás.

Zebulon beleesik a verembe.
R

Formalizáljuk kijelentéslogika nyelvén!

$$\begin{array}{ll} 1 & P \\ 1 & Q \\ \hline 0 & R \end{array}$$

Ez a következtetés így nem helyes, mert nem tartjuk fel a belső szerkezetet.

Alaphalmaz : emberek halmaza

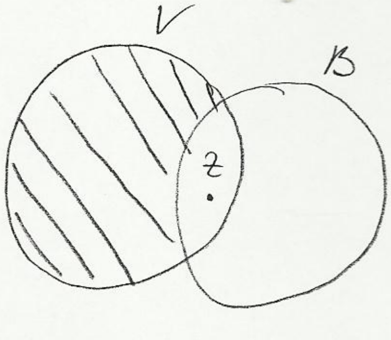
$$\begin{array}{l} \forall x\,(V(x) \Rightarrow B(x)) \\ V(z) \\ \hline B(z) \end{array}$$

a z : Zebulon $V \setminus B = \emptyset$ szinguláris kijelentés

$z \in V$

$z \in B$

V: vermet ás
B : beleesik



Így helyes a következtetés.
Megoldás indirekt módszerrel.

$$\begin{array}{lc} \forall x\,(V(x) \Rightarrow B(x)) & 1 \\ V(z) & 1 \\ \hline B(z) & 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{c} V(z) \Rightarrow B(z) \\ V(z) \\ \hline B(z) \end{array}\right\} \text{Modus ponens}$$

$\forall x$ kezdődő formula igaz, ha az alaphalmaz minden elemére így Zebulonra is igaz

(7) Premissza:

Egyes matematikusok szeretik az zenét.
Vannak akik szeretik a zenét és értenek a geometriához.

konklúzió: (a.) Minden matematikus ért a geometriához

(b.) Egyes matematikusok értenek a geometriához

(c.) Egyes emberek értenek a geometriához és nagyon szeretik a zenét.

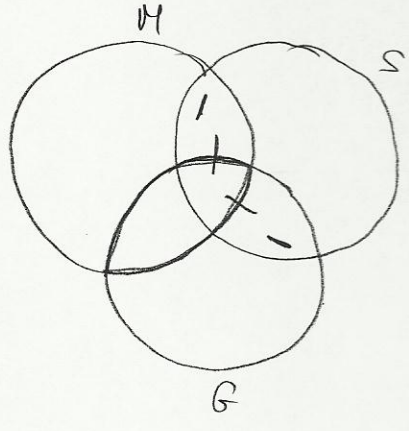
Alaphalmaz: emberek halmaza

S: szereti a zenét

$\exists x\,(M(x) \wedge S(x))$	i	$M \cap S \neq \emptyset$ nem helyes	
$\exists x\,(S(x) \wedge G(x))$	i	$S \cap G \neq \emptyset$ nem helyes, mert premisszák igaz konklúzióból nem tudok semmi	
1. $\forall x\,(M(x) \Rightarrow G(x))$	a	$M \setminus G = \emptyset$	
2. $\exists x\,(M(x) \wedge G(x))$	i	$M \cap G \neq \emptyset$	
3. $\exists x\,(G(x) \wedge S(x))$	i	$G \cap S \neq \emptyset$ helyes	

Egyrédű, kategorikus állítások

3. konklúzió ugyanaz mint a második premissza.



Indirekt módszerrel a második

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(M(x) \wedge S(x)) & 1 \\ \exists x\,(S(x) \wedge G(x)) & 1 \\ \hline \exists x\,(M(x) \wedge G(x)) & 0 \end{array}$$

$a \in U$
$b \in U$

$$\begin{array}{ll} \overbrace{M(a)}^{1} \wedge \overbrace{S(a)}^{1} & 1 \\ \overbrace{S(b)}^{1} \wedge \overbrace{G(b)}^{1} & 1 \\ \hline \underbrace{M(a)}_{1} \wedge \underbrace{G(a)}_{0} & 0 \end{array}$$ ← kijelenté

G(a) lehet hamis, mert nem szerepelt eddig.

Mivel mindegyikre hamis így x helyére bármelyiket írhatom.

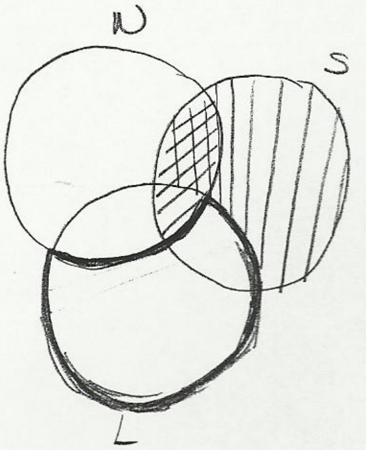
(8.) Négyoldalú gúlák nem szabályos testek.
Szabályos testek lapjai egybevágók.

Van olyan egybevágó lapokból álló test, amely nem négyoldalú gúla.

Predikátum logika nyelvén!
Alaphalmaz: testek

$$\begin{array}{lll} \forall x(N(x) \Rightarrow \neg S(x)) & e & N \cap S = \emptyset \\ \forall x(S(x) \Rightarrow L(x)) & a & S \setminus L = \emptyset \\ \hline \exists x(L(x) \wedge \neg N(x)) & o & L \setminus N = \emptyset \end{array}$$

nem helyes



$\exists S(x) \Rightarrow$ akkor helyes

Ez a szillogizmus kiegészítéssel lesz helyes a kiegészítés csak egy egzisztenciális premissza lehet azaz $\exists x P(x)$ alakú.

(9) Minden differenciálható fg. folytonos.
A szinusz fg. folytonos

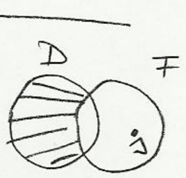
A szinusz fg. differenciálható

Predikátumlogika nyelv
alaphalmaz: fg.

$$\forall x(D(x) \Rightarrow F(x)) \quad a \quad D \setminus F = \emptyset$$

s: szinusz fg individuuma $F(s)$ ~~s:~~ $s \in F$, hamis

$D(s)$ $s \in D$ nem olvasható le.



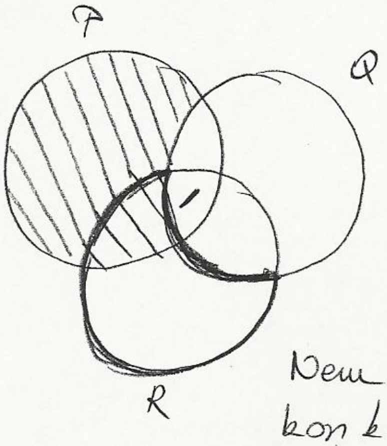
(10) Írdd fel a szilogizmust!

A E I O

általános áll. a $\qquad \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \qquad P \setminus Q = \emptyset$

részleges áll. i $\qquad \exists x(P(x) \land R(x)) \qquad P \cap R \neq \emptyset$

részleges tagadó o $\qquad \exists x(R(x) \land \neg Q(x)) \qquad R \setminus Q \neq \emptyset$



Nem helyes, mert a konklúzió nem olv. le a premisszákból.

(11) Egyetlen jó pedagógus sem büntetett feleslegesen.
Hannibál tanárúr feleslegesen büntette meg Pált.
Hannibál tanárúr nem jó tanító.

predikátum log.

alaphalmaz: emberek

$J(x) \Leftrightarrow x$ jó pedagógus

$B(x;y) \Leftrightarrow x$ feleslegesen bünteti y-t

h : Hannibál

p : Pál

$$\frac{\begin{array}{c}\forall y \forall x (J(x) \Rightarrow \neg B(x;y)) \\ B(h;p)\end{array}}{\neg J(h)} \qquad \frac{\begin{array}{cc}1 & J(h) \Rightarrow \neg B(h;p) \\ 1 & B(h;p)\end{array}}{\begin{array}{cc}0 & \neg J(h)\end{array}}$$

Eg ind sé (13

Nem egyértelmű ezért nem tudom Venn-diagrammal ábrázolni.

Indirekt módon nézzük

(12) Minden drága vagy nem tetszik.

Ami egy sznobnak tetszik nem tetszik nekem

Ami nekem tetszik nem tetszik egy sznobnak.

predikátum nyelv

alaphalmaz: tárgy

$D(x) \Leftrightarrow x$ drága

$T(x) \Leftrightarrow x$ tetszik nekem

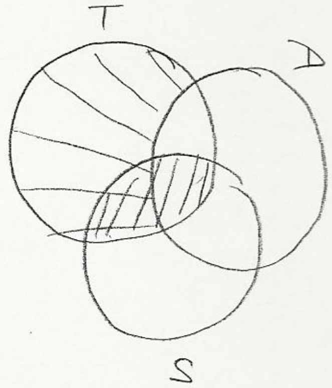
$S(x) \Leftrightarrow x$ tetszik egy sznobnak

$\forall x(D(x) \vee \neg T(x)) \sim \forall x(T(x) \Rightarrow D(x))$ a $T \setminus D = \emptyset$

$\forall x(S(x) \Rightarrow \neg T(x))$ e $S \cap T = \emptyset$

$\forall x(T(x) \Rightarrow \neg S(x))$ e $T \cap S = \emptyset$

Egyrészt,



Ez tehát helyes.

10. gyakorlat XI 24.

(13) A csecsemők nem logikusak.

Aki krokodilt tud idomítani azt nem vetjük meg.

A csecsemők nem tudnak krokodilt idomítani.

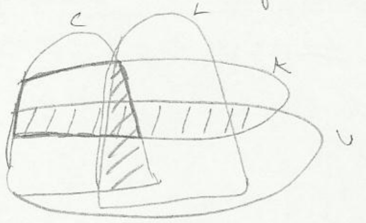
mivel tagadó

$\forall x(C(x) \Rightarrow \neg L(x))$ σ $C \cap L = \emptyset$

$\forall x(K(x) \Rightarrow \neg V(x))$ σ $K \cap V = \emptyset$

$\forall x(C(x) \Rightarrow \neg K(x))$ σ $C \cap K = \emptyset$

nem szillogizmus, mert nincs ami összekapcsolja a premisszákat ⇒ Venn-diagrammal megoldható.



az a következtetés nem helyes, van olyan része, amiről nem tudjuk.

Hf.: Venn-diagrammal.

Az ember szenvedő lény.
Minden szenvedő közveszélyes.
Édesapám nem közveszélyes.
Édesapám nem szenvedő (!)
Édesapám nem ember (hogyan?)

alaphalmaz: élőlények
édesapa: individuum kis a-val jelöljük.

8. tétel

VIII. fejezet:

Predikátum kalkulus. A természetes levezetés technikája.

A továbbiakban csak szintaktikailag építjük az elméletet, ekkor logikai kalkulusról beszélünk.

- Van kijelentéskalkulus : kijelentéslogikai formulákra
- Predikátum kalkulus

Megadunk axiómákat, levezetési szabályokat, majd a levezetés definícióját. A következményfogalomnak megfelelő szintaktikai fogalom a levezethetőség.

Axiómák:

1) Ezek axiómasémák, minden axiómából végtelen sok axióma kapható.

2) Igazolható, h. minden axióma logikai törvény.

10; kettős tagadás törvénye
12-14; egyedi kvantorkiemelés

$x \| t$ x helyére tetszőleges t termet helyettesítünk

Levezetési szabályok:

1) Az általánosítás szabálya csak bizonyos feltétellel alkalmazható.

gamma

Def.: Jelölje Γ az $\mathcal{L}$ nyelv véges sok formuláját.
($\Gamma = B_1, \dots B_n$.)
A Γ-ból a predikátumkalkulusban levezethető az $\mathcal{L}$ nyelv A formulája ($\Gamma \vdash A$), ha megalkotható egy olyan $D_1, D_2 \dots D_m$ (m: poz. egész) formulasorozat, melynek minden formulája, vagy axióma, vagy Γ-beli formula, vagy az őt megelőző formulákból a levezetési szabályok alkalmazásával áll elő, és $D_m = A$.

Ha vmely formulát az őt megelőző formulából az általánosítás szabályával kaptuk, pl.: C $\forall x C$
(C-ből minden x C-t), akkor az x nem lehet paraméter a C-t megelőző formulában.

jelölés: $\Gamma \vdash A$: gammából levezethető A

Pl.: $\dfrac{P(x) \vee Q(x)}{\forall x\,(P(x) \vee Q(x))}$ → nyílt premissza és nem levezetés
ebben a formában x szabad változó.

Megjegyzés:

1) Ha az A-t levezetve Γ-ból vannak olyan Γ-beli elemek, amelyek nem lépnek fel a levezetés során, akkor azt mondjuk, hogy az A formula ezen levezetése nem függ az említett formulától.

Def.: Ha A-nak a Γ-ból való levezetése során a $D_1 \ldots D_m$ sorozat valamely tagja nem következtetési szabály alapján került a sorozatba, akkor azt nyílt premisszának, vagy hipotézisnek nevezzük.

2) $\Gamma \nvdash A$: gammából A nem levezethető

Def: Ha Γ üreshalmaz, akkor az A-t levezethető formulának, vagy logikai tételnek nevezzük.
jele: $\nvdash A$ nem logikai tétel, nem levezethető formula

Def: $\Gamma \vdash A$ szekvenciának nevezzük (gammából levezethető A) levezetés: szekvencia megalapozása