P1.: Mutassuk meg, hogy : $\vdash A \Rightarrow A$

B-t helyettesítsük $A \Rightarrow A$-val ($B := A \Rightarrow A$)

$$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$ 1. axióma

2. axióma:

$B := A \Rightarrow A$

$C : A$

$$\underset{A}{(A} \Rightarrow (\underset{B}{(A \Rightarrow A)} \Rightarrow \underset{C}{A})) \Rightarrow ((\underset{A}{A} \Rightarrow \underset{B}{(A \Rightarrow A)}) \Rightarrow (\underset{A}{A} \Rightarrow \underset{C}{A}))$$

modusz ponensz

$$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$ 1. axiómát alkalmazzuk.

$$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$ úgy alkalmaztuk, hogy $B := A$

modusz ponensz

$$A \Rightarrow A$$

levezethető, mert csak axiómát használtunk, $\Gamma = \emptyset$. volt.

Kérdés: Mi a kapcsolat a levezethetőség és a logikai következmény fogalom között?

1, Def.: Ha a Γ-ból levezethető A esetén a Γ-nak logikai következménye A, akkor azt mondjuk, hogy a kalkulus helyes a szemantikai rendszerre nézve. $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$

2. Def) Megfordítva: Ha Γ-ból levezethető A, akkor azt mondjuk, h. a kalkulus teljes ... $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$

Ha mindkettő teljesül, akkor adekvát.

A helyesség könnyen igazolható, a teljességet Gödel, az ún TELJESSÉGI TÉTELében igazolta.

Speciálisan, ha $\Gamma = \emptyset$, akkor minden logikai törvény a predikátumkalkulusban levezethető és fordítva.

Mj.: A halmazelméleti levezetéseknél használni fogjuk, hogy a predikátumkalkulusban a következmény, és levezethetőség fogalmak egyenértékűek.

Mj.: A def-ban elsőrendű nyelvre hivatkoztunk, de vannak másodrendű nyelvek is, amelyeknél a levezethetőség és a következményfogalom felcserélhető.

Természetes levezetés technikája.

GENTZEN kalkulus

Vannak olyan kalkulusok, amelyekben kevesebb az axióma és több a levezetési szabály, mint a mienkben.
Van olyan, amelyben nincs egy axióma sem, csak levezetési szabály.
Ilyet Gentzen dolgozott ki.
Alapja a dedukció-tétel:

Ha Γ, A-ból levezethető a B $(\Gamma, A \vdash B)$, akkor Γ-ból levezethető $A \Rightarrow B$ $(\Gamma \vdash A \Rightarrow B)$
köznd.

Alkalmazása hogy történik, hogy ha Γ-ból le kell vezetni az $A \Rightarrow B$-t akkor felvesszük a premisszák közé az A-t és levezetjük a B-t.
A tétel alapján ekkor levezethető az $A \Rightarrow B$.

Több szabály van.
Azonosság törvénye: $\Gamma, A \vdash A$

A természetes levezetés logikai szabályai:

Minden szabályból kettő van: A bevezetés és eltávolítás szabálya.

A bevezetés azt jelenti, hogy hogyan kerülhet be az illető jel a levezetésbe.
Az eltávolítás: hogy kerülhet ki belőle.

A kondicionális bevezetése: Dedukció tétel.
Az eltávolítás : a modusz ponensz

A negáció bevezetése a redukció ad abszurdum megfelelője, az eltávolítása kettős tagadás törvényének megfelelője.

A természetes levezetés így olyan formulasorozat, melynek minden tagja vagy premissza, vagy a felsorolt szabályok szerint következik az előzőekből. Így az axiómák használatát kerüljük ki, de bizonyítható, hogy ∀ levezetési szabály az axiómákból levezethető.

Pl.: Bizonyítsd be!

$\vdash (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

1) $\underline{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

2) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

1) diszjunkció eltávolítását alkalmazzuk

3) $\underline{A \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$
$(B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \vdash A \vee B$

$A \vdash A$ azonosság törvénye miatt ez levezethető

$A \vdash A \vee B \Rightarrow$ a diszjunkció miatt levezethető

$A \vdash A \vee C$

$A \vdash A$

$A \vdash A \vee C$ ↑

Mj.: Ez a fajta levezetés "visszafelé" működik. Nézzünk példát a „felülről lefelé" történő igazolásra.

$\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

Az eljárás az, hogy ebben az esetben a premisszák közé felvesszük a ¬B-t és ellentmondást próbálunk levezetni.

$$\frac{\overbrace{A,\ \neg A}^{\Gamma},\ \overbrace{\neg B}^{A} \vdash \overbrace{A}^{B} \qquad A,\ \neg A,\ \neg B \vdash \neg A}{A,\ \neg A \vdash B}$$

azonossság törvénye

dedukció tétel:

$A \vdash \neg A \Rightarrow B$

$A \vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

9. tétel

$\boxed{\text{IX.}}$ Formális axiomatikus elméletek

Def.: Formális axiomatikus elmélet alatt értjük az olyan $T = \langle \Omega, x \rangle$ párt, ahol: Ω egy mattog nyelv, x pedig az Ω zárt formuláinak halmaza, melyeket a T elmélet nem logikai axiómáinak nevezünk.

Def.: Azt mondjuk, h. az Ω nyelv A formulája levezethető a T elméletben, ha a predikátum kalkulusban Γ-ból levezethető A ($\Gamma \vdash A$), ahol Γ-ban az elmélet véges sok nem logikai axiómája van.

Def.: Modell: Az Ω nyelv M interpretációja a T elmélet modellje, ha M-ben igaz a T minden egyes nem logikai axiómája.

Mj.: Ha x üreshalmaz ($x = \emptyset$) akkor a nyelv bármely interpretációja tekinthető az elmélet modelljének.

Mj.: Lehet olyan X is, hogy egyáltalán nincs modell, azt mondjuk, hogy az elmélet szemantikusan ellentmondásos.

Mj.: Általában egy elmélethez több modell adható. Az ilyen modelleket X típusú matematikai struktúrának nevezzük.

Tétel: Ha M a T elmélet egy modellje, és T-ben levezethető a B, akkor a B formula minden értékelése esetén teljesül, hogy M-nek logikai következménye a B.

$T \vdash B \Rightarrow M \models B$
(szintaktikai) (szemantikai)

Def.: A T formális axiomatikus elmélet ellentmondásmentes, ha nem létezik az Ω nyelvben olyan zárt formula, hogy teljesül, hogy $T \vdash A$ és levezethető $\neg A$ is. ($T \vdash \neg A$)

Gödel-féle teljességi tétel:

Minden elsőrendű matlog nyelvet használó ellentmondásmentes elméletnek van modellje.

Köv.: Ha egy A formula igaz a T elmélet minden modelljében, akkor a T-ben az A levezethető.

Tétel: (Predikátum-kalkulus teljessége)

Ha az A formula logikai törvény, akkor az levezethető a predikátum-kalkulusban.

Köv.: Legyen Γ véges sok formula és A ugyanezen Ω nyelvbeli formula.
Ha $\Gamma \models A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$

$\Gamma \models A$: Γ következménye A

$\Leftrightarrow$: akkor és csak akkor

$\Gamma \vdash A$: Γ következménye A.

Mj.: A naiv halmazelméletben ezt a következményt használni fogjuk.

Kompaktság nem kell!

Def.: A T elmélet teljes, ha az $\mathcal{L}$ nyelvben megfogalmazott tetszőleges A zárt formula esetén teljesül, hogy vagy az A vagy a negált A az elméletben levezethető.

Gödel nem teljességi tétele:

Bizonyos feltételeknek eleget tevő elmélet nem teljes.

Mj: A legtöbb elmélet teljesíti a tétel feltételeit, így nem teljes.

Köv.: A tételből következik az, hogyha egy axiómarendszer ellentmondástalan, akkor az ellentmondástalanság a rendszeren belül nem bizonyítható.

Def.: Egy axiomatikus elmélet A állítása független a rendszer X axiómáitól, hogy ha X-ből az A nem vezethető le: $X \nvdash A$.

Mj: Sokszor lényeges azt vizsgálni, hogy az axiómarendszer axiómái függetlenek-e egymástól.
A legtöbb axiómarendszerben nem függetlenek az axiómák, de pl. évszázadokon keresztül vizsgálták, hogy a ||-ossági axióma független a többitől.

Def.: Egy T elméletben az X axiómarendszere nézve az A és B állítás ekvivalens, ha T-ben levezethető az A bikondicionális B.

$$T \vdash A \Leftrightarrow B$$

Def.: Egy elmélet két modellje izomorf, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű reláció és művelettartó megfeleltetés létesíthető.

Formális axiomatikus ~~rendszerek~~ elméletek ~~az~~ megadtetése

Jegyzetből tanulni!

Nyelv – Axiómák – Def. – Lev.

Logikai   Mat.-i   Tételek

A definícióról a jegyzetben!

Pl. formális axiomatikus elméletre:

- : elemi aritmetika elmélete, nyelve az AR nyelv.

nem logikai axiómák:

1. egyenlőség axiómák: ~~x = y~~

$$x = x$$

$$((x=y) \wedge (x=z)) \rightarrow (y=z) \qquad \forall x, y, z.$$

(az axiómákban az axiómák elé minden változó szerinti kvantor odaértendő.)

2. Peano - axiómák:

$$S0 \neq 0$$

$$(Sx = Sy) \Longleftrightarrow (x = y)$$

Legyen A a nyelv tetszőleges formulája.

$$\big(A(0) \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow A(Sx))\big) \Rightarrow \forall x A(x)$$

ez a teljesindukció axiómasémája!

3. Az összeadást, és a szorzást definiáló axiómák:

$$x + 0 = x$$

$$x + S(y) = S(x+y)$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot S(y) = xy + x$$

Ennek az elméletnek a modellje a természetes számok halmaza (amit $\mathbb{N}$-val jelölünk.)
Ez a nyelvnek és az elméletnek is modellje.
Gödel talált olyan állítást, amely igaz $\mathbb{N}$-ban, de nem vezethető le az AR formális axiomatikus elméletbe.
Ez az elmélet nem teljes.

Mj: A valós számok elmélete ugyancsak az AR-nyelv segítségével építhető fel. Lásd ANALÍZIS Rimán-jegyzet.
Ez az elmélet teljes.

K: A formális és a szemantikai bizonyítás használatára, összehasonlítésére:

$\vdash \forall x \forall y \; (x = y \Rightarrow y = x)$

Tekintsük a 2. axiómát:

itt 2-helyére x-et írunk.

Így

$$((x = y) \wedge (x = x)) \Rightarrow (y = x)$$

az axióma igaz : 1

$x=y$ igaz, mert feltétel, így igaz 1

$x=x$, ez axióma igaz 1

$$\underbrace{((x = y) \wedge (x = x))}_{1} \Rightarrow (y = x) \; 1$$

is igaz, tehát bizonyítható.

10. fejezet

10. tétel

A naiv halmazelmélet

A nyelve : M^+

Ez egytípusú nyelv.

$x, y, z \ldots$ változók, halmazokat jelölnek.

A termek és formulák definiálása együtt történik.

1. minden változó term
2. ha t, z termek, akkor $t \in z$ formula.
   Ez lesz az atomi formula.
3. Ha φ, ψ formula, akkor $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ formula.
4. ha x változó, φ formula, akkor $\exists x \varphi$ és $\forall x \varphi$ formula.
5. ha x változó, φ formula, akkor (azon (x) elemek halmaza, amelyekre φ :) $\{x \mid \varphi\}$ term.

Mj: 1. ez másodrendű nyelv az 5. pont miatt, ugyanis a term definiálásában formulát használunk.

2. az 5-öst úgy mondjuk, hogy absztrakcióval definiált halmaz. S mivel a φ a nyelv tetszőleges formulája azt mondjuk, hogy megengedett a korlátlan absztrakció.

3. $\{x \mid \varphi\}$: az x itt kötött változóként szerepel.

Ezek miatt a nyelv másodrendű.

A nyelvnek megadható modellje, hasonlóképpen, mint a korábbi nyelveknél.

A szintaktikai felépítés ugyanúgy elvégezhető, és a predikátum kalkulus erre a nyelvre is művelhető.

A naiv halmazelmélet: $T = \langle M^+, \times \rangle$. Amit szintén M^+-val is szokás jelölni.

Mj.: A naiv halmazelmélet axiómatikus felépítése megmutatja azt, hogy csak az axiómatizálás nem véd meg az ellentmondásoktól.

$$x \subseteq y \; :\Longleftrightarrow \; \forall u\,(u \in x \Rightarrow u \in y)$$

$$x = y \; :\Longleftrightarrow \; (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$$

$$x = y \sim \forall u\,(u \in x \Rightarrow u \in y) \wedge \forall u\,(u \in y \Rightarrow u \in x) \sim$$

$\sim$ kvantorkiemelés törvényét alkalmazzuk:

$$\forall u\,\big((u \in x \Rightarrow u \in y) \wedge (u \in y \Rightarrow u \in x)\big) \sim$$

a bikondicionális definíciója alapján:

$$\sim \forall u\,(u \in x \Leftrightarrow u \in y)$$

Két axióma van:

1. Meghatározottsági axióma:

$$(x = y \wedge x \in z) \Rightarrow y \in z$$

2. Az absztrakció axiómája:

$$\big(z \in \{x \mid \varphi(x)\}\big) \Leftrightarrow \varphi(z)$$

Mj: 1. Mindkét axióma elé a szabadváltozók szerinti univerzális kvantor odaértendő.

2. Rövidítés:

$M^{+} \vdash A$: M-ben levezethető az A. Ez halmazelmélet tétely. Rövidítése: $\cdot\, A$

3. Az elmélet kiépítése úgy történik, hogy bevezetünk lényeges definíciókat, majd az absztrakció axiómája segítségével alapvető tulajdonságot fogalmazunk meg.
Ezekből tovább újabb tulajdonságok vezethetők le.

Def: (Nem rendezett pár fogalma)

$$\{x, y\} := \{u \mid u = x \lor u = y\}$$

Alapvető tulajdonság:

~~u ∈~~ ~~z ∈ {u~~

$$\cdot\ z \in \{x, y\} \iff (z = x \lor z = y)$$

Ebből levezethető tulajdonságok pl. $x \in \{x, y\}$ rendezetlen párnak:

$$x \in \{x, y\} \iff (\underbrace{\overset{1}{x = x} \lor x = y}_{1}) \quad 1$$

(1.)

Def. (Egyelemű halmaz fogalma)

$$\{x\} := \{u \mid u = u\}$$

Alapvető tulajdonság:

$$\cdot\ z \in \{x\} \iff (z = z)$$

Levezethető tulajdonság:

$x \in \{x\}$: x eleme az x egyelemű halmaznak