Def. (Az üreshalmaz fogalma)

$$\emptyset := \{u \mid u \neq u\}$$

$$\underbrace{z \in \emptyset}_{0} \Leftrightarrow \underbrace{z \neq z}_{0} \qquad 1$$

Alapvető tulajdonság:

$$\forall z \quad (z \notin \emptyset)$$

Def. (Két halmaz metszete, uniója, különbsége)

$$x \cap y := \{u \mid u \in x \wedge u \in y\}$$

$$x \cup y := \{u \mid u \in x \vee u \in y\}$$

$$x \setminus y := \{u \mid u \in x \wedge u \notin y\}$$

Mj: Levezethető belőlük több tulajdonság. Pl. a disztributivitás.

Def: (Korlátozott kvantorok fogalma)

Ezek logikai fogalmak. Tulajdonképpen rövidítést szolgálnak a bevezetett jelölések.

1. $(\forall x \in y)\, \varphi(x) :\Leftrightarrow \forall x (x \in y \Rightarrow \varphi(x))$ kondicionálist rövidít.

2. $(\exists x \in y)\, \varphi(x) \Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge \varphi(x))$

Kiolvasásuk:

1. Minden y-beli x esetén teljesül $\varphi(x)$
2. Van olyan y-beli x, amelyikre fennáll a $\varphi(x)$.

Def: (Halmazrendszerek uniója és metszete)

$$\bigcup X := \{ z \mid (\exists u \in X)(z \in u) \}$$

$$\bigcap X := \{ z \mid (\forall u \in X)(z \in u) \}$$

Def: (Univerzális halmaz)

$$U := \{ z \mid z = z \}$$

Megmutatható, hogy az alapvető tulajdonság az, hogy minden halmaz eleme az U-nak.

Def: (Hatványhalmaz)

$$P X := \{ u \mid u \subseteq X \}$$

Def: Egy kitüntetett végtelen halmazt definiálunk, amelyhez szükségesek a következő definíciók:

1. egy halmaz rákövetkezője:

$$S x := x \cup \{x\} \quad (x \text{ unió } x\text{-ből álló halmaz})$$

2. egy halmazt progresszívnek nevezünk, ha elemként tartalmazza az üres halmazt és minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is.

A kitüntetett végtelen halmazt ω-val jelöljük, az összes progresszív halmazrendszer metszeteként értelmezzük.

Az ω a következő végtelen sorozattal jellemezhető:

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ (mindegyik tartalmazza a megelőzőt is)

Neumann János ötlete alapján a természetes számok ezen halmazokból álló sorozat tagjaiként definiáljuk.

XII. 8.   12. előadás

Def.: (kijelöléssel definiált halmaz)

Ez az absztrakcióval történő definiálásnak a speciális esete.

$$\{x \in y : f(x)\} := \{\overset{\text{azon } x\text{-ek}}{x} : x \in y \wedge f(x)\}$$

x kötött, y szabad változó

Russell-féle halmaz

Az R halmaz azon halmazok összessége, amelyre teljesül, h. a halmaz nem eleme önmagának.

$$R := \{x : x \notin x\}$$

- ha $u \in R \Leftrightarrow u \notin u$ $\Rightarrow$ 2. axióma alapján

mivel ez minden u-ra igaz, írjunk u helyére R-et.

$\underbrace{R \in R}_{A} \Leftrightarrow R \notin R$ 1

$A \Leftrightarrow \neg A$ 1

$\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$ 1

Levezettünk egy állítást, és annak tagadását is, így az elmélet ellentmondásos! Ez a Russell-féle antinómia.

11. tétel

XI. fejezet

Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus halmazelmélet

Mj.: A naiv halmelm. ellentmondásosságának kiküszöbölésére több megoldás, több axiomatikus felépítés jött létre. A leggyakrabban használt elmélet ez a Z-F.-elmélet.

Leírására két nyelv használatos: a $\underline{ZF}$ elsőrendű nyelv (ZF) és a $\underline{ZF^+}$ másodrendű nyelv.

A Z-F elméletben 9 axióma van, ha a 10. kiválasztási axiómát is hozzájuk vesszük, akkor Z-F-C elméletről beszélünk.

Az axiómák között vannak halmazok létezését kimondó axiómák, ún. halmazképző axiómák, melyek adott halmazokból újak létrehozását teszik lehetővé, és vannak olyanok, amelyek az elmélet szempontjából fontosak, azaz biztosítják, hogy az eddigi antinómiák ne lépjenek fel.

1) Meghatározottsági axióma: (ugyanaz, mint a naiv halmelmben)

$\forall x \forall y \forall z \, ((x = y \wedge x \in z) \Rightarrow y \in z)$

$x = y :=$ (az egyenlőség def.-ja eltér a naiv halmelmtől.)

$\hookrightarrow \forall u \, (u \in x \Leftrightarrow u \in y)$

Ezt az axiómát a halmazok egyértelműségének igazolására használják.

2) Üres halmaz axiómája:

Létezik olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs.

Halmaz létezését kimondó axióma, hogy csak egy üres halmaz van, azt az 1)-es axióma segítségével lehet belátni. jele: $\emptyset$

3) Páraxióma:

Bármely két halmazhoz létezik olyan két halmaz, amely ezeket és csak ezeket tartalmazza elemként.

$\{x,y\}$ → belőlük képzett pár

Ez halmazképző axióma.

Mj.: definiálható az egyelemű halmaz

$\{x\} := \{x,x\}$

4) Unió axióma:

Bármely halmazrendszerhez létezik olyan halmaz, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza elemként, melyek a rendszer legalább egy elemének elemei.

Mj.: (a) egyértelműsége 1)-ből

(b) definiálható 2 halm. uniója $\{x \cup y\} := \cup\{x,y\}$

halmazképző axióma

5) Hatványhalmaz axióma:

Minden halmazhoz létezik olyan halmaz, melynek az elemei az adott halmaz részhalmazai.

6) A végtelen halmaz axiómája:

Létezik olyan halmaz, amelynek az üreshalmaz eleme, és minden y elem esetén $y \cup \{y\}$ egyelemű halmaz is eleme a halmaznak.

Mj.: $y \cup \{y\}$: y halmaz rákövetkezője

egy halmaz létezését kimondó axióma, a progresszív halmaz (lsd. nat. halmaz) létezését.

7) Részhalmaz axióma:

Minden x halmaz és f tulajdonság esetén létezik olyan u halmaz, amely x-nek a f tulajdonságú elemeiből áll.

Fontos feltétel, hogy a f formulában az u nem szerepelhet paraméterként.

Mj.: (a) A u-ra vonatkozó feltétel fontos, mert így kiküszöbölhető az önmagára való hivatkozás hibája.

(b) Levezethető belőle, hogy ebben az elméletben az U (univerzális halmaz) nem létezik, nem halmaz.

(c) Ez axióma séma, ugyanis végtelen sok halmaz létezését biztosítja a megfelelő f-k választásával.

(d) Levezethető belőle a 2 halmaz metszetének, különbségének definiálhatósága és az ω létezése.

8) Helyettesítés (pótlás) axiómája:

Ha definiált a halmazelméleti fgv, melynek x az értelmezési tartománya ⇒ egy ilyen f fgv-nek az értékkészlete is halmaz.

Mj.: (a) Ez az axióma elméleti szempontból jelentős, biztosítja, hogy növekvő számosságú halmazsorozathoz megadható legyen ezek mindegyikénél nagyobb számosságú halmaz.

9) Regularitási axióma v. a fundáltság axiómája:
megalapozás

Minden x nem üres halmaznak van olyan z eleme, melyre teljesül, hogy az x-szel való metszete üreshalmaz.

$x \neq \emptyset \quad z \cap x = \emptyset$

Elméleti szempontból jelentős, ennek segítségével kiküszöbölhető a Russell-féle antinómia.

Megmutatható, h. egyetlen halmaz sem eleme önmagának.

Ind.: Tfh: Van olyan x halmaz, hogy $x \in x$

Tekintsük a $\{x \cap \{x\}\}$ halmazt. Ez biztos, hogy nem üres, mert $x \in x$ és $x \in \{x\}$. $\Rightarrow \{x \cap \{x\}\} \neq \emptyset$.
Tekintsük a $\{x\}$ halmazt. Erre igaznak kell az axiómának, miszerint $\{\{x\} \cap x\} = \emptyset$.
van 1 eleme, az x.
ell. ↯ ellentmondás.

Az axióma alapján igazolható, hogy két halmaz nem lehet kölcsönösen eleme egymásnak.
$x \in y \wedge y \in x$

Ind.: Tfh $\exists^{\{x,y\}}\ x \in y \wedge y \in x$

Nézzük az $\{x, y\}$ rendezetlen párt. A $x \cap \{x, y\} =$
$= \{x\}$ → nem üres, mert eleme az y

$y \cap \{x, y\} = y \neq \emptyset$ nem üres, mert eleme az x

Nem lehet, hogy 2 halm. kölcs. eleme egymásnak

10) Kiválasztási axióma:

Ha egy x halmaz nem üres, és elemei páronként diszjunkt nem üres halmazok, akkor létezik olyan z kiválasztó halmaz, amelynek x minden elemével pontosan egy közös eleme van.

Mj.: (a) kiválasztási axióma a kiválasztó halmaznak csak a létezését mondja ki, de nem ad konstrukciós eljárást, így az intuicionista alapokon álló matematikusok ezt az axiómát nem fogadják el.

A használatát és a szemléletet korlátozza.

(b) Független a többi axiómától, úgy viselkedik, mint geometriában a párhuzamossági axióma.

(c) Gazdag az eszköztára a naiv halmazelmélet minden jelentős tétele igazolható, és az eddig ismert antinómiák nem lépnek fel benne.
Ellentmondásmentessége a rendszeren belül nem igazolható. (igaz rá a Gödel-Cohen tétel)

Gödel-Cohen 3 lényeges eredménye az axiómarendszerrel kapcsolatban:

I., Ha Z-F (Z-F-C) ellentmondástalan, akkor nem teljes.

II., Ha Z-F ellentmondástalan, akkor nem vezethető le benne sem a kiválasztási axióma, sem a tagadása.

III., Ha Z-F ellentmondásmentes, akkor a Z-F-C is az, és nem vezethető le benne sem a Cantor-féle kontinuum-hipotézis, sem annak a tagadása.

+ olv. jegyzetből a többit

XII. fejezet (XI - XIII) → 1 tétel (1h - nem lesz)

Relációk és fgv-ek a halmazokban,
természetes számok.

Rendezett pár definíciója → jegyzet

analízisben is
tanultuk

Reláció: (rendezett elempárok halmaza)

Mj.: Igazolni kell, h. az axiómák alapján az valóban halmaz.

Descartes - szorzat.

Speciális relációk: rendezési, ekvivalenciarel.

Egyváltozós fgv:

Kölcsönösen egyértelmű leképezés, bijekció: Olyan fgv, amelyik különböző elemekhez különböző elemeket rendel.
Létezik inverze.

Természetes számok: Term. számokat definiáljuk
$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \emptyset\}$.... , és ω-val jelöljük.

jell: rendezési relációt hoz létre az $\in$ - reláció
(∈ eleme)

$0 := \emptyset$; $1 := \{\emptyset\}$

Igazolható, h. a Peano axiómák érvényesek.

Definiálhatók az összeadás, szorzás, hatványozás műveletei.

Számosság:

Def.: Két halmaz számossága megegyezik, v. két halmaz ekvivalens, ha $\exists$ olyan bijekció, mely egyiket a másikra képezi le.
jele: $x \simeq y$

Def.: Egy halmazt végesnek nevezünk, ha ekvivalens valamely természetes számmal.

Def.: Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha ekvivalens a term. számok halmazával.

Tétel: Az ω, azaz a term. számok halmaza végtelen halmaz.

Cantor-tétele: Egyetlen halmaz sem ekvivalens a hatványhalmazával
$\neg(\omega \simeq P\omega)$

Következmény: ω nem ekvivalens $P\omega$-val, azaz $P\omega$ végtelen, és nem megszámlálható.

A Cantor-féle kontinuum-hipotézis egy megfogalmazása:

Minden halmazrendszer, amely a term. számok halmazának részhalmazaiból áll, vagy véges, vagy megszámlálható, vagy számossága megegyezik $P\omega$ számosságával.

A valós számok elmélete a természetes számok halmazának segítségével kiépíthető.

XIII. fejezet

Rendszámok, számosságok.

Félig rendezett halmaz

Lineárisan rend. halmaz

Fundált halmaz

Jól rendezett halmaz

Tranzitív halmaz

Rendszám

Kezdőrendszám