1. Bevezetés a matematikai logikai nyelvek elméletébe

1.1. Az alábbi mondatok közül melyek kijelentések? A kijelentéseknek határozzuk meg a logikai értékét!

(a) Egerben 1977 május 13-án a hőmérsékleti maximum 30° C volt.
(b) Minden rózsa fehér.
(c) Hogy vagy?
(d) $y > 10$.
(e) „ Ez a csendélet szebb, mint a másik."
(f) „ A Kedves utca csöppet se kedves,
A Kedves utcán ne járj soha, kedves." (W. Broniewski)
(g) „ A varjú, hóval lepve
fehérnek tűnik, de fekete." (Pak Phengjon)
(h) „ Az egek bőrét látjátok-é miképp hasogatják?" (P. J. Jouve)
(i) „ Amit lát, arról nem fecseg:
ilyen barátot szeretek! „ (Jun Szondo)
(j) „ Míg szülőnk életben van,
K. igaz az ápolás kötelesség." (Csong Cshol)
(k) „ Ha célba jutsz magasra törve, → felszólítás, nem kijelentés
ne nevesd ki lent maradt ;" (Kim Szudzseng)
(l) „ Ha a fák pusztulóban,
lugas voltuk elenyészik." (Csong Cshol)

1.2. Írjuk le a Geom nyelvben a következőket:
(a) Egyenes és vele párhuzamos sík definíciója.
(b) Két kitérő egyenes definíciója.
(c) Két metsző sík definíciója.
(d) Két metsző egyenesre egy és csak egy sík illeszkedik.
(e) Egy egyenes akkor és csak akkor párhuzamos egy síkkal, ha létezik a síkban az egyenessel párhuzamos egyenes.
(f) A síkban egy ponton át csak egy olyan egyenes húzható, mely a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamos.

1.3. Fejezzük ki az Ar nyelvben az alábbiakat! Az interpretáció legyen a természetes számok halmazán!
(a) z az x és az y legnagyobb közös osztója.
(b) z az x és az y legkisebb közös többszöröse.
(c) Az ikerprímek száma végtelen.
(d) Minden természetes szám előállítható két négyzetszám összegeként.
(e) Az $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenletnek pontosan két különböző gyöke van.

1.4. Az előző feladat állításai közül melyek igazak és melyek hamisak?

1.5. Írjuk le Ar nyelvben, **R** interpretációban a következőket:
(a) x kisebb mint y.
(b) Ha y kisebb, mint z, akkor van olyan szám, amelyik y-nál nagyobb, de z-nél kisebb.
(c) Létezik olyan szám, hogy $\sqrt{5}$.
(d) Létezik olyan szám, hogy $(-\sqrt[3]{3})$.

2. Elsőrendű nyelvek, szintaktikai fogalmak definíciót

2.1. Az Ar nyelv alábbi kifejezései közül melyek termek és melyek formulák?

(a) $x \cdot y$
(b) $S0 + z$
(c) $x \cdot y = z$
(d) $SS0 \cdot y = z$
(e) $S0 \cdot SS0$
(f) $S0 \cdot SS0 = SSS0$.

2.2. Írjunk termeket és atomi formulákat az Ar nyelvben!

2.3. Adott elsőrendű Ω nyelvben termek-e az alábbi kifejezések?

(a) $f(x,y) \vee g(x)$
(b) z
(c) $h(x,y)$
(d) $h(g(x,s(y)), z, f(z))$
(e) $f(g(u,v,r), h(x))$
(f) $\neg h(u,v)$.

2.4. Adjuk meg az előző feladatban szereplő termek összetettségi számát!

2.5. Legyenek A, B, C egy mat. log. nyelv formulái. Döntsük el, hogy az alábbi jelsorozatok formulák-e:

(a) $(A \vee B) C$
(b) $(A \Rightarrow C) \wedge B$
(c) $\neg A \Leftrightarrow B \neg C$
(d) $\neg A \Leftrightarrow (B \vee \neg C)$
(e) $\neg(A \wedge \neg C$.

2.6. Legyenek A, B, C formulák. Zárójelezzük az alábbi jelsorozatokat úgy, hogy formulákat kapjunk:

(a) $A \vee \neg B \Rightarrow C$
(b) $A \Rightarrow B \wedge \neg C \vee \neg A$.

2.7. Legyenek x, y, z egy mat. log nyelv változói, f és g egy, ill. kétváltozós függvényjelek, P és Q egy, ill. kétváltozós prédikátumszimbólumok. Formulák-e ebben a nyelvben az alábbi jelsorozatok:

(a) $g(f(y),z)$
(b) $Q(x,y) \wedge \forall x P(x)$
(c) $P(Q(x),f(y))$,
(d) $\exists y Q(y,x) \Rightarrow P(f(x))$.

2.8. Írjuk le az alábbi formulák összes részformuláit, és határozzuk meg azok logikai összetettségét:

(a) $P(y)$
(b) $P(y) \vee Q(x)$
(c) $R(g(y),f(y,x))$
(d) $\neg \forall x R(x,y) \Rightarrow (Q(f(x,y) \vee \forall z S(z))$
(e) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$.

2.9. Melyek részformulái az alábbiak közül a

$\forall x((\exists y Q(y,x) \wedge \forall y \exists x R(x,y)) \Rightarrow \forall y P(x,y))$ formulának?

(a) $\forall y P(x,y)$

(b) $\exists y Q(y,x) \wedge \forall y \exists x R(x,y)$
(c) $\forall x \exists y Q(y,x)$
(d) $P(x,y)$.

2.10. A következő formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, és döntsük el a változókról, hogy melyik előfordulásuk kötött és melyik szabad:
(a) $\exists x(\exists y Q(x,y) \vee R(x,y,z))$
(b) $\forall x \exists y(S(x,y,z) \Leftrightarrow \forall y P(y,x))$
(c) $\forall x \forall y(R(x) \Rightarrow S(x,y)) \vee \exists z Q(x,z)$
(d) $\exists y(Q(x,y) \wedge \forall x R(x,y))$
(e) $\forall y P(y) \wedge S(y)$
(f) $\forall y \exists x(P(x) \Rightarrow R(x)) \vee \forall x Q(x)$
(g) $\forall x \forall y(S(x,y) \vee Q(z))$.

2.11. Határozzuk meg az alábbi formulákban a kötött és a szabad változókat:
(a) $\exists x P(x)$
(b) $\forall x A(x) \vee \exists y B(y)$
(c) $\exists x(\forall y Q(x,y) \Rightarrow P(x,y,z))$
(d) $\exists y(Q(x,y) \vee \exists x R(x))$
(e) $\forall y R(x,y) \wedge \forall x P(x,y)$
(f) $Q(x,z) \Rightarrow \neg \forall x S(x,x)$
(g) $\forall y \exists z(Q(x,y,z) \Rightarrow \exists x R(z,x))$
(h) $\exists x \forall y(P(x) \wedge R(g(y),x))) \Rightarrow \exists y S(x,y)$.

2.12. Döntsük el a következő formulákról, hogy melyek egymás variánsai:
(a) $\exists z(P(z,y) \Rightarrow \exists x Q(z,x)) \wedge \forall v R(v,x)$
(b) $\exists z(P(x,v) \Rightarrow \exists x Q(z,x)) \wedge \forall v R(v,x)$
(c) $\exists x(P(x,v) \Rightarrow \exists z Q(x,z)) \wedge \forall v R(v,x)$
(d) $\exists u(P(u,y) \Rightarrow \exists u Q(u,z)) \wedge \forall u R(u,x)$.

2.13. Vannak-e az alábbi formulák között kongruens formulák:
(a) $\exists v(\forall z P(v,z,x) \Rightarrow \exists x(Q(x,u) \vee \forall z P(v,z,x)))$
(b) $\exists x(\forall z P(x,z,v) \Rightarrow \exists z(Q(z,u) \vee \forall v P(z,v,x)))$
(c) $\exists x(\forall z P(x,z,u) \Rightarrow \exists v(Q(v,u) \vee \forall z P(v,z,x)))$
(d) $\exists w(\forall x P(x,w,v) \Rightarrow \exists z(Q(z,u) \vee \forall v P(z,v,x)))$
(e) $\exists w(\forall x P(w,x,v) \Rightarrow \exists v(Q(v,u) \vee \forall z P(v,z,x)))$
(f) $\exists u(\forall v P(u,v,w) \Rightarrow \exists z(Q(z,x) \vee \forall v P(u,v,z)))$.

2.14. Rendelkeznek-e a változótisztaság tulajdonsággal az alábbi formulák? Ha nem, hozzuk olyan alakra!
(a) $\forall x R(x,y,z) \Rightarrow (\exists x \forall y(Q(y) \vee R(x,y,z)))$,
(b) $\forall y \exists x(Q(x,y) \Rightarrow R(u,v)) \wedge \forall u \forall v(S(u,x.v) \Rightarrow \neg R(y))$,
(c) $\exists u \forall v(R(u,v) \Rightarrow S(x,y)) \wedge \forall u \exists v Q(u,v)$.

2.15. Végezzük el a következő helyettesítéseket! Melyek megengedett helyettesítések?

(a) $(\forall y P(x,y,z)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(b) $(\forall y P(x,y,z)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

(c) $(\forall y Q(y,x)) \begin{pmatrix} x \\ f(y,z) \end{pmatrix}$

(d) $(Q(x,v) \Rightarrow \forall v P(v)) \begin{pmatrix} x \\ f(y,v) \end{pmatrix}$

2.16. Döntsük el, hogy az alábbi helyettesítések megengedettek-e, és végezzük el a szabályos helyettesítést!

(a) $(\forall y Q(x,y) \vee \exists x P(x,y)) \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$

(b) $(\forall x(R(x,y) \wedge \exists z P(x,z,v)) \vee Q(x)) \begin{pmatrix} x & y & v & z \\ z & z & g(z) & v \end{pmatrix}$

(c) $(\exists y S(y,z) \wedge \exists y Q(x,y)) \begin{pmatrix} x & z & y \\ g(x,y) & y & z \end{pmatrix}$

2.17. Hajtsuk végre az alábbi szabályos helyettesítéseket:

(a) $(Q(x,y) \vee \exists y P(x,y))\ (x,y \,||\, f(x,y),z)$

(b) $(\forall z \exists y P(x,y) \Leftrightarrow R(x))\ (x \,||\, g(x,z))$

(c) $(\forall y S(y,z) \Rightarrow \exists x P(x,y))\ (x,z,y \,||\, g(x,y),y,z)$

(d) $(\exists y(\exists z S(x,z,y \Leftrightarrow \exists z Q(x,z))\ (x,y \,||\, f(y,z),g(y))$

(e) $(\exists x R(x,u) \Rightarrow (\exists v Q(v,x) \vee P(z,v)))\ (u,v,z \,||\, g(u,x),x,x)$.

3. A nyelv szemantikája, igazságértékelés

3.1. Jelölje A(x,y) „ x apja y-nak” prédikátumot az emberek halmazában. Határozzuk meg az alábbi formulák logikai értékét!

(a) $\forall x \exists y A(x,y)$

(b) $\exists y \forall x A(x,y)$

(c) $\forall y \exists x A(x,y)$

(d) $\exists x \forall y A(x,y)$.

3.2. Igaz-e a következő, Geom nyelvben írt formula?

$\forall A \forall B \forall a \forall \alpha((A \in a \wedge B \in a \wedge A \neq B \wedge A \in \alpha \wedge B \in \alpha) \Rightarrow a \in \alpha)$.

3.3. Az alábbi kijelentések közül melyik melyiknek a tagadása?

(a) Ketten ülnek az asztalnál.

(b) Minden téglalap paralelogramma.

(c) Az idén nem voltak választások.

(d) Négyen ülnek az asztalnál.

(e) Van olyan téglalap, amelyik paralelogramma.

(f) Tavaly voltak választások.
(g) Nem ülnek ketten az asztalnál.
(h) Nem minden téglalap paralelogramma.
(i) Tavaly nem voltak választások.
(j) Az idén voltak választások.

3.4. Tagadjuk a következő kijelentéseket, és a tagadást fogalmazzuk meg többféleképpen:
(a) Olaszország fővárosa Róma.
(b) Minden matematika szakos főiskolai hallgató szorgalmas.
(c) Léteznek szabályos testek.

3.5. Jelölje T a „Tél van.", S a „Kati síel a Tátrában." kijelentéseket. Képezzük ezekből a lentebb felsorolt mondatokat, és döntsük el hogy közülük melyek logikai összetételek:
(a) T, ezért S.
(b) T vagy S.
(c) S mert T.
(d) T és S.
(e) Ha T akkor S.

3.6. Képezzünk logikailag összetett kijelentéseket az alábbi mondatokból:
Gergő egyetemista.
Gergő szorgalmas?
Gergő logikát tanul.
Gergő történelmet tanul.

3.7. Milyen értelemben szerepel a következő kijelentésekben a vagy kötőszó?
(a) „Vagy lesz új értelmük a magyar igéknek,
Vagy marad régiben a bús magyar élet."
(Ady Endre: Fölszállott a páva)
(b) A 123 435 szám számjegyeinek összege vagy páros, vagy páratlan.
(c) Katival vagy Eszterrel megyek kirándulni.
(d) Vagy Katival vagy Eszterrel megyek kirándulni.

3.8. A következő kijelentések közül melyek igazak?
(a) Ha a szinusz függvény nem periódusos, akkor a tangens függvény korlátos.
(b) Ha öt szabályos test van, akkor Spanyolország fővárosa Madrid.
(c) Ha a négyzet húrnégyszög, akkor a téglalap nem az.
(d) Ha az öt páros szám, akkor a tizenhat osztható néggyel.

3.9. Formalizáljuk a kijelentéslogika nyelvén az alábbi állításokat:
(a) Ha jutalmat kapok, akkor külföldre utazunk nyaralni.
(b) Nem kapok jutalmat, és nem utazunk külföldre nyaralni.
(c) Csak akkor utazunk külföldre nyaralni, ha jutalmat kapok.
(d) Nem lehetséges, hogy nem kapok jutalmat és külföldre utazunk nyaralni.
(e) Akkor és csak akkor utazunk külföldre nyaralni, ha jutalmat kapok.

3.10. Formalizáljuk a kijelentéslogika nyelvén az 1.1. feladat kijelentéseit!

3.11. Jelentse N: „Van nyelvvizsgád.", S: „Sikerült az államvizsgád.", D: „Kapsz diplomát.".
Mit jelentenek az alábbi formulák:
(a) $(N \wedge S) \Rightarrow D$
(b) $D \Rightarrow (N \wedge S)$

(c) $(S \wedge \neg N) \Rightarrow \neg D$.

3.12. Formalizáljuk a kijelentéslogika nyelvén az alábbi állításokat:

(a) Vagy alszanak, vagy nincsenek itthon.

(b) Ildikó vagy egészségesen táplálkozik, vagy sokat sportol.

(c) Jánosnak építészmérnöki diplomája vagy építésztechnikusi oklevele van, de nem dolgozik, hanem továbbtanul.

(d) Ahhoz, hogy Péter megnyerje a versenyt, szükséges, de nem elégséges a sok gyakorlás.

(e) Péter akkor és csak akkor nyeri meg a versenyt, ha szerencséje van, vagy sokat gyakorol.

(f) Nem igaz, hogy Péter nem szerencsés vagy nem gyakorol sokat és nem nyeri meg a versenyt.

3.13. Formalizáljuk a tiszta predikatumlogika nyelvén:

(a)
1. Van olyan főiskolai hallgató, aki nem tanul logikát.
2. Nem minden főiskolás tanul logikát.
3. A bölcsészek kivételével minden főiskolás tanul logikát.

(b)
1. Mindenki meglátogatja Klárit
2. Valaki senkit sem látogat.
3. Egyes betegeket senki sem látogat.

(c)
1. y-nak adósa valaki.
2. z mindenkinél okosabb.
3. x ismer valakit, de y mindenkit ismer.

3.14. Formalizáljuk a tiszta predikatumlogika nyelvén az alábbi kijelentéseket:

(a) László tanár.
Ha Mária tanár, akkor László is az.
Minden ember tanár.
Léteznek tanárok.

(b) Minden erdész vadász.
Van törvényszegő vadász.
Nincs törvényszegő erdész.
Vannak olyan halászok, akik betartják a törvényt.
Minden erdész betartja a törvényt.

(c) Minden madár tojással szaporodik.
Vannak nem tojással szaporodó madarak.
A teknősök és a madarak tojással szaporodnak.
A teknősök kivételével minden tojással szaporodó élőlény madár.

(d) Mindenki, aki hazudik valakinek, nem tisztességes.
Aki hazudik az apjának, az nem tisztességes.
Mindenki, rajtam kívül, hazudik mindenkinek.
Valaki hazudik a saját apjának.

3.15. Legyen az alaphalmaz a sokszögek halmaza, S(x) jelentse azt, hogy „x szabályos sokszög, T(x) pedig azt, hogy „x téglalap. Mit jelentenek az alábbi formulák? Adjunk ezeknek más interpretációt is!

(a) $\exists x S(x)$

(b) $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg T(x))$

(c) $\exists x(S(x) \wedge T(x))$

(d) $\exists x(T(x) \Rightarrow S(x))$.

3.16. Határozzuk meg a következő formulák értékét, ha P értéke hamis, Q értéke pedig igaz.

(a) $P \Rightarrow (Q \vee P)$
(b) $(P \vee \neg Q) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$
(c) $\neg(\neg Q \vee P) \Rightarrow (P \wedge Q)$.

3.17. A megadott értékek egyértelműen meghatározzák-e az alábbi formulák értékét?
(a) $\neg P \Leftrightarrow Q$, ha $P \Leftrightarrow Q$ igaz
(b) $\neg P \Leftrightarrow Q$, ha $P \Leftrightarrow Q$ hamis
(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$, ha Q igaz
(d) $(\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, ha Q igaz.

4. Logikai törvények

4.1. Formalizáljuk a megfelelő nyelven az alábbi három kijelentést, majd a logikai törvények alkalmazásával igazoljuk, hogy a kapott három formula egyenértékű:
(a) Ha *a, b, c* egy háromszög oldalait jelölik és a *c* oldallal szemközti szög tompaszög, akkor a *c* a leghosszabb oldal.
(b) Ha *a, b, c* egy háromszög oldalait jelölik, akkor ha a *c* oldallal szemközti szög tompaszög, a *c* a leghosszabb oldal.
(c) Ha egy háromszögnek a *c* oldallal szemközti szöge tompaszög, akkor ha *a, b, c* jelölik a háromszög oldalait, a *c* a leghosszabb oldal.

4.2. Egyenértékűek-e az alábbi formulapárok?

(a) $P \vee (\neg P \wedge Q)$,	$P \vee Q$
(b) $P \wedge (\neg P \vee Q)$,	$P \wedge Q$
(c) $\neg(\neg P \vee \neg(P \wedge \neg Q))$,	$P \wedge \neg Q$
(d) $(Q \Rightarrow P) \wedge (R \Rightarrow P)$,	$(Q \vee R) \Rightarrow P$
(e) $\neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg Q \vee R)$,	$P \wedge Q \wedge \neg R$
(f) $(P \wedge \neg(Q \wedge \neg P)) \vee R \vee \neg(\neg P \wedge Q)$,	$R \vee P \vee \neg Q$.

4.3. A tanult logikai törvények segítségével igazoljuk, hogy az alábbi formulák logikai törvények:
(a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
(b) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
(c) $(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
(d) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
(e) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
(f) $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q)) \Rightarrow \neg P$
(g) $((P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow R)) \Rightarrow R$
(h) $((P \Rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \Rightarrow \neg P$
(i) $(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee \neg P \vee \neg Q$.

4.4. Írjuk át diszjunktív és konjunktív normálformára a következő formulákat:
(a) $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \wedge R)$
(b) $\neg((P \wedge Q) \Rightarrow \neg P) \wedge \neg((P \wedge Q) \Rightarrow \neg Q)$
(c) $\neg(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee R)$
(d) $(R \Rightarrow P) \Rightarrow (\neg (Q \vee R) \Rightarrow P)$.

4.5. A logikai törvények alkalmazásával hozzuk a megfelelő legegyszerűbb alakra az alábbi formulákat, majd készítsük el az áramkörüket:

(a) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$
(b) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
(c) $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
(d) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \neg P$
(e) $\neg(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q))$.

4.6. Írjuk föl az alábbi értéktáblázattal megadott formula diszjunktív normálformuláját! Hozzuk egyszerűbb alakra és vázoljuk föl az utóbbi áramkörét!

P	Q	R	?
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

4.7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák nem logikai törvények:
(a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(b) $\forall x\exists yP(x,y) \Rightarrow \exists x\forall y\neg P(x,y)$
(c) $\forall x\exists y(Q(x,y) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x\exists yP(x,y)$.

4.8. Kielégíthetőek-e a következő formulák:
(a) $\exists x\forall y(P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$
(b) $\exists x\forall y(P(x,x) \Rightarrow \forall zQ(x,y,z))$.

4.9. Egyenértékűek-e az alábbi formulapárok:
(a) $\exists x\forall y(\neg(y > x))$, $\exists x\neg\exists y(y > x)$,
(b) $\exists x\forall y(y > x \vee (\neg(y > 0)))$, $\exists x\forall y(y > 0 \Rightarrow y > x)$.

4.10. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját:
(a) $\exists x\forall yQ(x,y) \wedge \exists x\forall yP(x,y)$
(b) $\exists x\forall yR(x,y) \Rightarrow \exists x\forall yP(x,y)$
(c) $\exists x(\forall yQ(x,y) \wedge \exists zR(z)) \Rightarrow \exists xR(x)$
(d) $\forall x(\exists yR(x,y) \Rightarrow \forall xP(x)) \Rightarrow \forall x\exists yR(x,y)$.

5. Logikai következmények

5.1. Helyesek-e az alábbi következtetési sémák?

(a)
$R \Rightarrow \neg Q$
$\neg P \vee Q$
———
$P \Rightarrow \neg R$

(e)
$P \Rightarrow Q$
$S \Rightarrow Q$
$R \Rightarrow Q$
———
$(S \vee R) \Rightarrow Q$

(b) $(S \vee Z) \Rightarrow U$

(f) $P \Rightarrow (R \vee Q)$

$$\frac{(P \vee Q) \Rightarrow (R \wedge S)}{P \Rightarrow U}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P \Rightarrow R}$$

(c)
$$\frac{\begin{array}{c} R \Leftrightarrow S \\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow R \\ \neg(P \Rightarrow S) \end{array}}{Q \Rightarrow S}$$

(g)
$$\frac{\begin{array}{c} (P \vee Q) \Rightarrow R \\ P \Rightarrow R \\ (P \wedge Q) \Rightarrow \neg R \\ \neg Q \end{array}}{\neg(P \wedge Q)}$$

(d)
$$\frac{\begin{array}{c} R \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \\ \neg S \vee R \\ Q \end{array}}{S \Rightarrow P}$$

(h)
$$\frac{\begin{array}{c} (Q \Rightarrow V) \wedge (S \Rightarrow U) \\ \neg V \wedge U \\ P \Rightarrow R \\ (P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \end{array}}{\neg P}$$

5.2. Ellenőrizzük, hogy a konklúzió a premisszák logikai következménye-e?

(a) Ha egyetemre járok, akkor nagyon elfoglalt leszek és nem tanulok meg franciául.
Ha elfelejtem az angol nyelvet és nem tanulok meg franciául, akkor nem kapok külföldi ösztöndíjat.

Ha elfelejtem az angolt és egyetemre járok, akkor nem kapok külföldi ösztöndíjat.

(b) Ha cipőben mehetek túrázni, akkor- amennyiben vasárnap nincs rossz idő- fölmegyünk az Egedre.
Ha vasárnap rossz az idő, akkor nem mehetek cipőben túrázni.
Ha fölmegyünk az Egedre, akkor cipőben túrázom.

Ha vasárnap nincs rossz idő, akkor cipőben túrázom és fölmegyünk az Egedre.

(c) Ha Gábor nyáron Rómába utazik, akkor Firenzébe is ellátogat.
Ha Gábor Velencébe megy a nyáron, akkor Veronát is megnézi.
Gábor a nyáron nem látogat el Firenzébe, de Veronát megnézi.

Gábor nyáron Rómába utazik és Velencébe is elmegy.

(d) Ha Klári kabátot vesz, akkor sálat vagy kesztyűt is vesz.
Klári nem vesz sálat.
Klári kabátot vagy sálat vagy kesztyűt vesz.

Klári kesztyűt vesz.

(e) Ha Juhász nem találkozott akkor éjjel Szabóval, akkor Szabó volt a gyilkos vagy Juhász hazudik.
Ha a gyilkosság éjfél után történt, akkor Szabó volt a gyilkos vagy Juhász hazudik.
Ha nem Szabó volt a gyilkos, akkor Juhász nem találkozott akkor éjjel Szabóval és a gyilkosság éjfél után történt.

Szabó volt a gyilkos.

(f) Vagy Szabó, vagy Nagy lesz a vezérigazgató.

Ha Szabó lesz a vezérigazgató, Kiss nem vállalja az elnöki tisztet.
___
Ha Kiss vállalja az elnöki tisztet, akkor Nagy lesz a vezérigazgató.

(g) Ha nincs állásom, Kata nem támogat többé és elköltözik.
Ha Kata csomagol és elköltözik, elviszi a kutyát is.
Nincs állásom és Kata csomagol.
___
Kata elviszi a kutyát.

(h) Ha János jó átlaggal zárta a félévet és kap ösztöndíjat, akkor sítáborba utazik.
Ha János jó átlaggal zárta a félévet akkor ösztöndíjat kap.
Ha János sítáborba utazik, akkor jó átlaggal zárta a félévet.
___
Nem igaz, hogy János jó átlaggal zárta a félévet vagy sítáborba utazik.

5.3. Milyen konklúzió vonható le az alábbi premisszákból?

(a) 1. Ha nem utazunk Veronába, akkor nem utazunk Velencébe sem.
2. Ha elutazunk Velencébe, akkor Rómába is elutazunk, de csak akkor.
3. Nem utazunk Rómába.

(b) 1. Ha Kati nem hozza el a példatárat, vagy nem működik az Internet, akkor nem tudjuk megoldani az analízis feladatokat, vagy csak nagyon sok idő alatt.
2. Ha nem működik az Internet, vagy nem tudjuk megoldani az analízis feladatokat, akkor nem tudunk felkészülni a zárthelyire.
3. Kati elhozza a példatárat és fel tudunk készülni a zárthelyire.

(c) 1. Dóri akkor és csak akkor megy a diszkóba, ha Klári vagy Éva is megy.
2. Ha Klári nem megy a diszkóba, akkor Gergő sem megy.
3. Ha Dóri megy a diszkóba, Zsolt nem megy.
4. Gergő megy a diszkóba.

5.4. Milyen nevezetes következtetési sémákra mutatnak példát az alábbi következtetések?

(a) Ha a 12 páros szám, akkor a 12 négyzete osztható néggyel.
A 12 páros szám.
___
A $12^2 = 144$ osztható néggyel.

(b) Ha a 3+q racionális, akkor q is racionális.
A q nem racionális.
___
A 3+q nem racionális.

(c) Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor szemközti oldalainak az összege egyenlő.
___
Ha egy négyszög szemközti oldalainak az összege nem egyenlő, akkor a négyszög nem érintőnégyszög.

(d) Ha két háromszög megfelelő oldalai egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó.
Ha két háromszög egybevágó, akkor területük egyenlő.
___
Ha két háromszög megfelelő oldalai egyenlők, akkor területük egyenlő.

(e) Ez a görbe ellipszis vagy kör.
Ez a görbe nem kör.
―――
Ez a görbe ellipszis.

5.5. Helyesek-e az alábbi következtetési sémák?

(a) $\forall x P(x)$
―――
$P(x)$

(b) $P(x)$
―――
$\exists x P(x)$

(c) $\forall x P(x)$
―――
$\exists x P(x)$

(d) $\forall x \forall y Q(x,y)$
―――
$\forall x Q(x,x)$

(e) $\forall x \neg Q(x,x)$
$\forall x \forall y \forall z((Q(x,y) \wedge Q(y,z)) \Rightarrow Q(x,z))$
―――
$\forall x \forall y(Q(x,y) \Rightarrow \neg Q(y,x))$

5.6. Formalizáljuk a megfelelő nyelven az alábbi következtetéseket, és döntsük el, hogy helyesek-e:

(a) Minden négyzet trapéz.
Van olyan érintőnégyszög amelyik négyzet.
―――
Van olyan trapéz, ami érintőnégyszög.

(b) Minden differenciálható függvény folytonos.
A koszinusz függvény differenciálható.
―――
A koszinusz függvény folytonos.

(c) A halak nem tüdővel lélegeznek.
A halak gerinces állatok.
―――
Van olyan gerinces állat, amelyik nem tüdővel lélegzik.

(d) Minden matematika szakos főiskolai hallgató tanul logikát.
Minden matematika szakos főiskolai hallgató tanul analízist.
―――
Van olyan analízist tanuló főiskolai hallgató, aki logikát tanul.

(e) Minden paralelogramma trapéz.
Van olyan trapéz, amelyik nem szabályos sokszög.
―――
Van olyan paralelogramma, amelyik nem szabályos sokszög.

(f) Aki sportol, az edzett.
Aki edzett, az egészséges.
―――
Némely sportoló egészséges.

(g) A tánclub és a színjátszókör közös tagjai szeretik a zenét.
Van olyan színjátszókörös, aki nem zenekedvelő.
―――
A tánclubnak van olyan tagja, aki nem színjátszókörös.