<u>Félig rendezett halmaz</u> def: $\langle P, <\rangle$ párt, ahol P halmaz, $<$ P-n értelmezett reláció félig rendezett halmaznak nevezzük, ha teljesül:

1) $\neg (p<p)$
2) $((p<r) \wedge (r<q)) \Rightarrow (p<q)$

minden P beli p, q, r elem esetén.

<u>Mj</u>: Ezt a def-t éles rendezésre mondjuk ki, definiálhatjuk a félig rendezett halmazt $\leq$ jelre, nem éles rendezésre

Def

<u>Lin. rend. halm.</u>: Egy félig rendezett halmazt lineárisan rendezett halmaznak nevezünk, ha tetszőleges két p, q elemére $p<q$, $p=q$, $q<p$ közül pontosan az egyik teljesül

Def: <u>Fundált halmaz</u>

Egy félig rendezett halmazt fundált halmaznak nevezünk, ha $\forall$ nem üres részhalmazában van minimális elem. (min. elem: nincs olyan halmazbeli elem, amely az adott rendezésben megelőzné)

<u>Mj</u>: Ezek a halmazok azért érdekesek, mert alkalmazható bennük a teljes indukció általánosítása, amit transzfinit indukciónak nevezünk.
jegyzet nem kell.

lényeg: kezdőelemre vonatkozó feltétel nincs, és a megelőző elemek halmazáról térünk át a köv. elemre.

Def.: <u>Jól rend. halm</u>: Egy halmaz jól rendezett, ha lineárisan rendezett és fundált.

Mj.: Minden természetes szám és az ω jól rendezett halmaz.

Tranzitív halm. def: Egy halm. tranzitív, ha minden eleme esetén az utóbbi elemei is elemei a halmaznak.

Def: Rendszám: Egy halmaz rendszám, ha tranzitív és jól rendezett az ∈ (elemének lenni) relációra nézve.

Mj.:

I. Minden természetes szám és az ω is rendszám.
II. A rendszámok összessége nem halmaz.
III. Értelmezhető a rendszámokon két művelet, melyek segítségével tetszőleges rendszámnál nagyobb rendszám alkotható.
IV. Értelmezhető az úgynevezett transzfinit rekurzió. Itt is a megelőző elemek halmaza segítségével definiálhatunk.
V. A transzfinit rekurzió segítségével definiálható az összeadás, szorzás a rendszámok halmazán. (nem kommutatívak a műveletek)

Def: Legyen P_1, P_2 két félig rendezett halmaz. Az f fgv, melynek az értelmezési tartománya P_1, értékkészlete P_2, hasonlósági leképezés, ha kölcsönösen egyértelmű és rendezéstartó.

Def.: Két félig rendezett halmazt hasonlónak nevezünk, ill. azt mondjuk, hogy rendtípusuk megegyezik, ha van olyan hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át.

Mj: I. Minden jól rendezett halmaz egy és csak egy rendszámhoz hasonló
Azt mondjuk, h. a jól rendezett halmazok „rendszámokkal mérhetők"

Def.: Egy rendszámot kezdőrendszámnak nevezünk, ha nem ekvivalens egyetlen nála kisebb rendszámmal sem.

1) Minden term. szám kezdőrendszám.
2) Az ω kezdőrendszám.
3) Minden rendszámhoz megadható nála nagyobb kezdőrendszám.

Mj.: Véges halmazok esetén igazolható, h. minden rendezett halmaz jól rendezett, és ha ekvivalensek egymással, akkor hasonlóak is egymáshoz. Ha számosságuk megegyezik, $\Rightarrow$ rendszámuk is egyenlő. Véges rendezett halmazok rendszámait sorszámoknak szokás nevezni.

Számosságok

1) Z-F 2) Z-F-C

1) Z-F kiválasztási axióma nélkül

Def.: Egy X halmaz beágyazható az Y halmazba, ha X ekvivalens Y valamely részhalmazával.

Cantor-Schröder-Bernstein tétel:
Ha X beágyazható Y-ba, és Y beágyazható X-be, akkor X ekvivalens Y-nal.

Def.: Két halmaz számossága egyenlő, ha ekvivalensek egymással.

Mj.: I. A ~~halmazok között def~~ számosságok körében definiálható a rendezés, az összeadás és a szorzás. Ez kommutatív

II. $N := \{ \bar{\bar{\alpha}} : \alpha \in \omega \}$

Bizonyítható, h. N ekvivalens ω-val, és a két halmaz között megadható olyan bijekció, amely hasonlóság és műveletttartó az összeadásra és a szorzásra. Ezért a természetes számok halmazát azonosítják N-nel, azaz, a véges halmazok számosságát tekintik a term. számoknak.

III. $\overline{\overline{P_x}} = 2^{\bar{\bar{x}}}$ Egy x halm hatványhalmazának számossága $= 2^x$ számosságával

$M < 2^M$ M: számosság

Def.: Egy számosságot alef-nek nevezünk, ha valamely jól rendezett halmaz számossága.

Mj.: $\aleph_0$ a jólrendezett halmaz (ω) számossága
alef 0

Kérdés: Van-e olyan számosság, amely nem alef?

A Z-F-ben van. A $P\omega$ nem jól rendezhető.

2) Z-F-C:

A kiválasztási axiómából levezethető a jólrendezési tétel.

Jólrendezési tétel: Minden halmaz jól rendezhető. →

→ minden számosság alef számosság.

Állítások, amelyekhez szükséges a kiválasztási axióma.

I. Ha egy halmaz végtelen, van megszámlálható részhalmaza.
II. Ha egy halmaz végtelen, akkor ekvivalens valamely valódi részhalmazával.

III. Létezik valós számokból álló nem mérhető halmaz.

Def.: Egy X halmaz számossága δ kezdőrendszám, melyre teljesül, h. X ekvivalens δ-val.

<u>Cantor-féle kontinuum hipotézis:</u>

A $P\omega$ számossága alef1. (Nem létezik olyan halmaz, amelynek a számossága a természetes számok számossága és a kontinuumszámosság között van.)

<u>Antinómiák:</u>

Ha a számosságok összessége halmaz, akkor ennek a halmaznak a számossága legyen m. De m maga is számosság, eleme a halmaznak. Minden számosságnál van nagyobb számosság, legyen ez n. n is eleme a halmaznak. Fennáll: $m < n$, $n < m$. Ellentmondás.

<u>Cantor-féle antinómia: U</u>

U halmaz, számossága: m. PU számossága: 2^m, de a PU maga is halmaz, eleme az U-nak. De $m < 2^m$, $2^m < m$. Ellentmondás.