(h) Egyetlen hettita harcos sem gyáva.
Nincs olyan hettita harcos, aki nem szakállas.

Van olyan szakállas, aki nem gyáva.

5.7. Az alábbi két premisszának következménye-e mindhárom konklúzió?
Minden erdész vadász.
Minden vadász törvénytisztelő.
---
1. Van törvénytisztelő erdész.
2. Van törvénytisztelő vadász.
3. Létezik olyan ember, aki törvénytisztelő, de sem erdész, sem vadász.

5.8. Helyesek-e az alábbi következtetések:

(a) Minden általános iskolának van tehetséges diákja.
A tehetséges diákokat felveszik a gimnáziumba.

Minden általános iskola valamely diákját felveszik a gimnáziumba.

(b) Az elnökség minden tagja értelmiségi és demokrata.
Az elnökség néhány tagja fiatal.

Léteznek fiatal demokraták.

5.9. Helyes-e az alábbi következtetési séma?

$$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$$
$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$$
$$P(a)$$

$$\neg R(a)$$

5.10. Vizsgálhatók-e Venn-diagrammal a felsorolt következtetések? A megfelelő módszerrel döntsük el, hogy helyesek-e:

(a) Aki analízisből megbukott, az elsőéves.
Aki analízisből megbukott, köteles utóvizsgát tenni.
Egyetlen elsőéves sem köteles utóvizsgát tenni.

Senki sem bukott meg analízisből.

(b) Minden hegymászó, aki részt vesz a tanfolyamon, egyetemista.
A tanfolyam néhány résztvevője hegymászó vagy egyetemista.

Van olyan egyetemista, aki részt vesz a tanfolyamon.

(c) Aki logikát vagy analízist tanul, pedagógiát is tanul.
Egyesek, akik pedagógiát tanulnak, nem tanulnak analízist.

Vannak olyanok, akik logikát tanulnak, de analízist nem.

(d) Néhány előléptetett kedvence az elnöknek vagy a vezérigazgatónak.
A vezérigazgató kedvencei közül csak olyanokat léptettek elő, akik az elnöknek is kedvencei.

Az elnök kedvencei között van előléptetett.

(e) Minden dobos tagja a klubnak.
A klubban nincs teniszező dobos.
Béla dobos.
___
Béla klubtag, de nem teniszezik.

(f) Egyetlen mérnök sem vállalkozó.
A kuratórium néhány tagja mérnök.
___
A kuratórium néhány tagja nem vállalkozó.

(g) Károly mindenkit lenéz aki műveletlenebb nála.
Gábor nem műveletlenebb, mint akik lenézik őt.
___
Gábor nem műveletlenebb mint Károly.

5.11. Helyesek-e az alábbi kategorikus szillogizmusok:

(a)	(b)	(c)	(d)
e(P;Q)	i(A;B)	i(D;H)	a(H;K)
e(R;P)	a(C;B)	a(H;K)	o(H;L)
e(R;Q)	e(C;A)	a((K;D)	o(L;K).

5.12. Az alábbi következtetések hiányosak, adjuk meg az „elhallgatott premisszákat”:

(a) Ági és Kati édestestvérek.
Kati anyja tanítónő.
___
Ági anyja pedagógus.

(b) Joli éveinek száma páros és osztható 3-mal.
Joli elmúlt 12 éves, de még nincs 21.
___
Joli 18 éves.

6. Levezetés, a természetes levezetés technikája

6.1. Levezetések-e az alábbi formulák a $\Gamma = \{(A \Rightarrow B(x)\}$-ből, ahol A-ban az x nem fordul elő szabadon:

(a) $A \Rightarrow B(x)$, $A \Rightarrow \forall x A(x)$

(b) $(A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (C(y) \Rightarrow (A \Rightarrow B(x)))$
$A \Rightarrow B(x)$
$C(y) \Rightarrow (A \Rightarrow B(x))$.

6.2. Levezetések-e az alábbi formulasorozatok:

(a) $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$, $\forall x A(x) \Rightarrow \forall y A(y)$

(b) $P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
$(P(x) \Rightarrow \exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow \exists x P(x)))$
$\forall x P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow \exists x P(x))$.

6.3. Vezessük le az alábbi logikai törvényeket:

(a) $(A \vee A) \Rightarrow A$

(b) $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$.

6.4. A természetes levezetés szabályait alkalmazva készítsük el az alábbi levezetéseket:

(a) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \mid\!-\!- A \Rightarrow C$

(b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \mid\!-\!- A \Rightarrow C$

(c) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(d) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$
(e) $\vdash (B \wedge A) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
(f) $\vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

6.5. Igazoljuk, hogy a következő formulák a természetes levezetés szabályai szerint levezethetők:
(a) $P \vee \neg P$
(b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (\neg R \Rightarrow \neg P))$.

6.6. A tanult logikai törvények mindegyike levezethető a természetes levezetés szabályainak alkalmazásával. Adjuk meg az itt felsorolt törvények levezetését:
(a) $(A \wedge \forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B(x))$, x nem paraméter A-ban,
(b) $(\forall x B(x) \Rightarrow A) \Leftrightarrow \exists x(B(x) \Rightarrow A)$, x nem paraméter A-ban,
(c) $(\exists x A(x) \vee \exists x\, B(x)) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$,
(d) $(\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.
(e) $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$.
(f) $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$.

MEGOLDÁSOK

1. Bevezetés a matematikai logikai nyelvek elméletébe

1.1.
(a) Igen. A meteorológiai feljegyzések alapján a logikai értéke megadható.
(b) Igen. Hamis.
(c) Nem, mert kérdő mondat.
(d) Nem, mert nem tudjuk eldönteni, hogy igaz vagy hamis.
(e) Nem, mert szubjektív, nem egyértelmű a logikai érték hozzárendelése.
(f) Nem, mert felszólítást fejez ki.
(g) Igen, igaz.
(h) Nem, mert kérdő mondat.
(i) Nem, mert felkiáltás.
(j) Igen, igaz.
(k) Nem, mert nem kijelentés.
(l) Igen. Igaz.
1.2.
(a) $(a \,||\, \alpha)$: $\Leftrightarrow \neg\exists A(A \in a \wedge A \in \alpha)$ vagy $(a \,||\, \alpha)$: $\Leftrightarrow \forall A(A \in a \Rightarrow A \notin \alpha)$.
(b) Az a és b egyeneseket kitérőknek nevezzük, ha nincs közös síkjuk és közös pontjuk.
(a és b kitérők): $\Leftrightarrow \neg\exists\alpha(a \in \alpha \wedge b \in \alpha) \wedge \neg\exists A(A \in a \wedge A \in b)$.
(c) Az α és β síkot metszőnek nevezzük, ha pontosan egy közös egyenesük van.
(α és β metsző): $\Leftrightarrow \exists! a(a \in \alpha \wedge a \in \beta)$.
(d) $\forall a \forall b\, (\exists A(A \in a \wedge A \in b) \Rightarrow \exists!\alpha(a \in \alpha \wedge b \in \alpha))$.
(e) $\forall a \forall \alpha(a \,||\, \alpha \Leftrightarrow \exists b(b \in \alpha \wedge b \,||\, a))$.
(f) $\forall \alpha \forall a \forall A((A \in \alpha \wedge a \in \alpha \wedge A \notin a) \Rightarrow \forall b \forall c((A \in b \wedge b \,||\, a \wedge A \in c \wedge c \,||\, a) \Rightarrow (b = c))$.
1.3.
(a) $(z = (x,y))$: $\Leftrightarrow (z \mid x) \wedge (z \mid y) \wedge \forall v(v \mid x \wedge v \mid y \Rightarrow z \geq v)$.
(b) $(z = [x,y\,])$: $\Leftrightarrow (x \mid z) \wedge (y \mid z) \wedge \forall\, v\, (x \mid v \wedge y \mid v \Rightarrow v \geq z)$.
(c) $\forall x \exists y((y \geq x) \wedge$ (y-prímszám) $\wedge$ (y+SS0-prímszám)).

(d) $\forall x \exists y \exists z(x = y \cdot y + z \cdot z)$.
(e) $\exists y \exists z((((y \cdot y) - SS0 \cdot y + S0) = 0) \wedge (z \cdot z) - SS0 \cdot z + S0) = 0) \wedge z \neq y$.
1.4.
(c) igaz (sejtés), (d) hamis, (e) hamis.
1.5.
(a) $(x < y) :\Leftrightarrow \exists\, u(x + u \cdot u = y) \wedge u \neq 0$
(b) $(y < z) \Rightarrow (\exists u(y < u \wedge u < z))$
(c) $\exists x(x \cdot x = SSSSS0)$
(d) $\exists x(x \cdot x \cdot x + SSS0 = 0)$.

2. Elsőrendű nyelvek, szintaktikai fogalmak

2.1 Termek: (a), (b), (e), formulák: (c), (d), (f).
2.2 Termek például: x, 0, $x + y$, $x \cdot y$, $(x + y) \cdot 0$,...
Atomi formulák: $Sx + z \cdot x = S0$, $(x + y) \cdot (x + y) = SSSS0$,·.....
2.3. Nem termek az (a) és (f).
2.4. Összetettség: (b): 0, (c):1, (d): 4, (e): 3.
2.5.(a) nem, (b) igen, (c) nem, (d) igen, (e) nem.
2.6.
(a) $(A \vee \neg B) \Rightarrow C$, $A \vee (\neg B \Rightarrow C)$, $A \vee \neg(B \Rightarrow C)$,
(b) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee \neg A)$, $(A \Rightarrow (B \wedge \neg C)) \vee \neg A$, $A \Rightarrow ((B \wedge \neg C) \vee \neg A)$,
$((A \Rightarrow B) \wedge \neg C) \vee \neg A$, $A \Rightarrow (B \wedge (\neg C \vee \neg A))$ ...
2.7. (a) nem, (b) igen, (c) nem, (d) igen.
2.8.
(a) $P(y)$ részformulái:
$P(y)$; logikai összetettsége: 0,
(b) $P(y) \vee Q(x)$ részformulái:
$P(y) \vee Q(x)$; logikai összetettsége: 1,
$P(y), Q(x)$; logikai összetettsége: 0,
(c) $R(g(y), f(y,x))$ részformulái:
$R(g(y), f(y,x))$; logikai összetettsége: 0,
(d) $\neg \forall x R(x,y) \Rightarrow (Q(f(x,y)) \vee \forall z S(z))$ részformulái:
$\neg \forall x R(x,y) \Rightarrow (Q(f(x,y)) \vee \forall z S(z))$; logikai összetettsége: 5
$\neg \forall x R(x,y)$, $Q(f(x,y)) \vee \forall z S(z)$; logikai összetettsége: 2
$\forall x R(x,y)$, $\forall z S(z)$; logikai összetettsége: 1
$R(x,y)$, $Q(f(x,y))$, $S(z)$; logikai összetettsége: 0,
(e) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$ részformulái:
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$ logikai összetettsége: 6
$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$; logikai összetettsége: 4
$A \Rightarrow \neg B$; logikai összetettsége .2
$A \Rightarrow B$, $\neg B$; logikai összetettsége: 1
A, B; logikai összetettsége: 0.

2.9. (a) igen, (b) igen, (c) nem, (d) igen.
2.10.
(a) $\exists x$ hatásköre: $\exists y Q(x,y) \vee R(x,y,z)$
$\exists y$ hatásköre: $Q(x,y)$
z előfordulása, és y második előfordulása szabad.

(b) $\forall x$ és $\exists y$ hatásköre: $S(x,y,z) \Leftrightarrow \forall yP(y,x)$
$\forall y$ hatásköre: $P(y,x)$
z előfordulása szabad.
(c) $\forall x$ és$\forall y$ hatásköre : $R(x) \Rightarrow S(x,y)$
$\exists z$ hatásköre: $Q(x,z)$
x második előfordulása szabad.
(d) $\exists y$ hatásköre: $Q(x,y) \wedge \forall xR(x,y)$
$\forall x$ hatásköre: $R(x,y)$
x első előfordulása szabad.
(e) $\forall y$ hatásköre: $P(y)$
y második előfordulása szabad.
(f) $\forall y$ –nak nincs hatásköre, fiktív kvantor
$\exists x$ hatásköre: $P(x) \Rightarrow R(x)$
$\forall x$ hatásköre: $Q(x)$
nincs szabad változó.
(g) $\forall x$ és $\forall y$ hatásköre: $S(x,y) \vee Q(z)$
z szabad változó.

2.11.
(a) és (b) nincs szabad változó
(c) y második előfordulása és z szabad
(d) x első előfordulása szabad
(e) x első, és y második előfordulása szabad
(f) x első előfordulása és z szabad
(g) x első előfordulása szabad
(h) x harmadik előfordulása szabad.

2.12. (a) és a (c).

2.13.(a) és az (f) , valamint a (b) és a (c).

2.14.
(a) Nem. $\forall xR(x,y,z) \Rightarrow (\exists u\forall v(Q(v) \vee R(u,v,z)))$,
(b) Nem. $\forall q\exists r(Q(r,q) \Rightarrow R(u,v)) \wedge \forall a\forall b(S(a,x,b) \Rightarrow \neg R(y))$,
(c) Nem. $\exists u\forall v(R(u,v) \Rightarrow S(x,y)) \wedge \forall z\exists wQ(z,w)$.

2.15.
(a) Igen
(b) Nem. Jelöljük át a kötött változót egy, a formulában nem szereplő változóra, majd végezzük el a helyettesítést! $\forall vP(x,v,z)$; a végeredmény: $\forall vP(f(x,y),v,z)$.
(c) Nem. Az előző eljárást alkalmazva a végeredmény: $\forall uQ(u,f(y,z))$.
(d) Igen.

2.16.
(a) Nem, a szabályos helyettesítés eredménye:
$\forall yQ(z,y) \vee \exists uP(u,x)$
(b) Nem, a szabályos helyettesítés eredménye:
$\forall p(R(p,z) \wedge \exists uP(p,u,g(z)) \vee Q(z))$
(c) Nem, a szabályos helyettesítés eredménye:
$\exists uS(u,y) \wedge \exists vQ(g(x,y),v)$.

2.17.
(a) $Q(f(x,y,y)) \vee \exists uP(f(x,y),u)$
(b) $\forall u\exists yP(g(x,z),y) \Leftrightarrow R(g(x,z))$

(c) $\forall u S(u,y) \Rightarrow \exists x P(x,z)$
(d) $\exists u(\exists v S(f(y,z),v,u) \Leftrightarrow \exists w Q(f(y,z),w))$
(e) $\exists y(R(y,g(u,x)) \Rightarrow (\exists w Q(w,x) \vee P(x,x)))$.

3. A nyelv szemantikája, igazságértékelés

3.1.
(a) Mindenki apja valakinek. Hamis.
(b) Valakinek mindenki az apja. Hamis.
(c) Mindenkinek van apja. Igaz.
(d) Valaki apja mindenkinek. Hamis.

3.2. A formula interpretációja: „ Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra." Axióma, igaz.

3.3. Ha egy állítás igaz, tagadása hamis és fordítva; így (a) tagadása (g), (b) tagadása (h), (c) tagadása (j), (f) tagadása (i).
3.4.
(a) Nem igaz, hogy Olaszország fővárosa Róma. Olaszország fővárosa nem Róma. ...
(b) Nem igaz, hogy minden matematika szakos főiskolai hallgató szorgalmas. Van olyan matematika szakos főiskolai hallgató, aki nem szorgalmas. ...
(c) Nem léteznek szabályos testek. Minden test nem szabályos. ...

3.5. Interpretálva a mondatokat (pl. (a) Tél van ezért Kati síel a Tátrában.) látható, hogy az (a) és a (c) okhatározói, így nem logikai összetétel.

3.6. A második mondat nem kijelentés, így nem szerepelhet az összetételekben. Több lehetőség van, pld. „ Gergő egyetemista és logikát tanul, de történelmet nem."

3.7. A (c) –ben szereplő vagy megengedő értelmű, a többi kizáró értelmű.

3.8. A kondicionális logikai értékelése alapján csak a (c) állítás hamis, mert az előtagja („A négyzet húrnégyszög.") igaz, az utótagja („ A téglalap nem húrnégyszög.") hamis.

3.9. J: „Jutalmat kapok."
K: „Külföldre utazunk nyaralni."
(a) $J \Rightarrow K$
(b) $\neg J \wedge \neg K$
(c) $K \Rightarrow J$
(d) $\neg(\neg J \wedge K)$
(e) $K \Leftrightarrow J$.
3.10.
(a) P: „Egerben 1977 május 13-án a hőmérsékleti maximum 30° C volt."
P.
(b) 1. Alaphalmaz a rózsák halmaza.
F(x): „x fehér".
$\forall x F(x)$.
2. Alaphalmaz a virágok halmaza.
R(x): „x rózsa".
F(x): „x fehér".
$\forall x(R(x) \Rightarrow F(x))$.

(g) A formalizálásra több lehetőség is van, nézzünk két példát:

1. P: „A varjú hóval lepve fehérnek tűnik."
   Q: „A varjú fekete."
   $P \wedge Q$.
2. Alaphalmaz a madarak halmaza.
   V(x): „x varjú".
   H(x): „x hóval lepett".
   F(x): „x fehérnek tűnik".
   K(x): „x fekete".
   $\forall x(((V(x) \wedge H(x)) \Rightarrow F(x)) \wedge K(x))$.

(j) P: „Szülőnk életben van."
Q: „Szülőnk ápolása kötelesség."
$P \Rightarrow Q$.

(l) F: „A fák pusztulóban vannak."
L. „A fák lugas volta elenyészik."
$F \Rightarrow L$.

3.11.

(a) Ha van nyelvvizsgád és sikerült az államvizsgád, akkor kapsz diplomát.

(b) Csak akkor kapsz diplomát, ha van nyelvvizsgád és sikerült az államvizsgád.

(c) Ha sikerült az államvizsgád és nincs nyelvvizsgád, akkor nem kapsz diplomát. Kifejezőbben megfogalmazva: „Hiába sikerült az államvizsgád, de nincs nyelvvizsgád, akkor nem kapsz diplomát."

3.12.

(a) A: „Alszanak." I: „Itthon vannak."
$A \nabla \neg I$

(b) E: „Ildikó egészségesen táplálkozik." S: "Ildikó sokat sportol."
$E \vee S$

(c) E: „Jánosnak építészmérnöki diplomája van." O: „Jánosnak építésztechnikusi oklevele van." D: „János dolgozik." T: „János továbbtanul."
$(E \vee O) \wedge \neg D \wedge T$.

A d,e,f jelölései:
P: Péter megnyeri a versenyt. G: Péter sokat gyakorol. S: Péternek szerencséje van.

(d) $(P \Rightarrow G) \wedge \neg(G \Rightarrow P)$

(e) $P \Leftrightarrow (S \vee G)$

(f) $\neg((\neg S \vee \neg G) \wedge \neg P)$.

3.13.

(a) Az alaphalmaz a főiskolások halmaza.
L(x): „x tanul logikát", B(x): „x bölcsész".
1. $\exists x \neg L(x)$; 2. $\neg \forall x L(x)$; 3. $\forall x(\neg B(x) \Rightarrow L(x))$.

Az alaphalmaz az emberek halmaza.
F(x): „x főiskolai hallgató."
1. $\exists x(F(x) \wedge \neg L(x))$; 2. $\neg \forall x(F(x) \Rightarrow L(x))$; 3. $\forall x((F(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow L(x))$.

(b) Az alaphalmaz az emberek halmaza.
k: Klári; L(x,y): „x látogatja y-t"; B(x): „x beteg".
1. $\forall x L(x,k)$; 2. $\exists x \forall y \neg L(x,y)$; 3. $\exists x(B(x) \wedge \forall y \neg L(y,x))$.

(c) Mindhárom predikátum (nyitott mondat), alaphalmaz legyen az emberek halmaza.
1. A(x,y): x-nek adósa y. $\exists x A(x,y)$,

2. $O(x,y)$: x okosabb y-nál. $\forall x O(z,x)$.
3. $I(x,y)$: x ismeri y-t. $\exists y I(x,y) \wedge \forall x I(y,x)$.

3.14

(a) Az alaphalmaz az emberek halmaza.

l: László; m: Mária; T(x): „x tanár”.

$T(l)$

$T(m) \Rightarrow T(l)$

$\forall x T(x)$

$\exists x T(x)$.

(b) Alaphalmaz az emberek halmaza.

V(x): „x vadász; H(x): „x halász”; E(x): „ x erdész”; T(x): „x törvényszegő”.

$\forall x(E(x) \Rightarrow V(x))$

$\exists x(T(x) \wedge V(x))$

$\neg\exists x(T(x) \wedge E(x))$

$\exists x(H(x) \wedge \neg T(x))$

$\forall x(E(x) \Rightarrow \neg T(x))$.

(c) Az alaphalmaz az élőlények halmaza.

M(x): „ x madár”; T(x): „x tojással szaporodik”; S(x): „x teknős”.

$\forall x(M(x) \Rightarrow T(x))$

$\exists x(\neg T(x) \wedge M(x))$

$\forall x((S(x) \vee M(x)) \Rightarrow T(x))$

$\forall x((\neg S(x) \wedge T(x)) \Rightarrow M(x))$.

(d) Alaphalmaz az emberek halmaza.

e: Én; H(x,y): „x hazudik y-nak”; A(x,y): „x apja y-nak”; T(x): „x tisztességes”.

$\forall x \exists y(H(x,y) \Rightarrow \neg T(x))$

$\forall x \forall y((H(x,y) \wedge A(y,x)) \Rightarrow \neg T(x))$

$\forall x \forall y(\neg(x = e) \Rightarrow H(x,y))$

$\exists x \exists y(H(x,y) \wedge A(y,x))$.

3.15.

(a) Létezik szabályos sokszög.

(b) Ha egy sokszög szabályos, akkor nem téglalap. (A szabályos sokszög nem téglalap.)

(c) Létezik olyan szabályos sokszög, amelyik téglalap.

(d) Létezik olyan sokszög, amelyik ha téglalap, akkor szabályos.

3.16.

(a) A kondicionális értéke igaz, ha az előtagja hamis, így a formula igaz.

(b) A konjunkció első tagjának az értéke hamis (mindkét diszjunkciós tag hamis, így a diszjunkció is hamis), ezért a formula értéke hamis.

(c) A formula értéke hamis.

3.17. A bikondicionális igaz, ha P és Q egyszerre igaz, vagy hamis. Így az (a) formula hamis, míg a (b) igaz.

(c) A formula értéke R-től függ.

(d) A formula értéke igaz.

4. Logikai törvények

4.1. Jelölje A: „a, b, c egy háromszög oldalait jelölik.”, B: „A háromszög c oldallal szemközti szöge tompaszög.” C: „A c a leghosszabb oldal.” állításokat.

(a) $(A \wedge B) \Rightarrow C \sim \neg(A \wedge B) \vee C \sim \neg A \vee \neg B \vee C$

(b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \sim \neg A \vee (B \Rightarrow C) \sim \neg A \vee \neg B \vee C$

(c) $B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \sim \neg B \vee (A \Rightarrow C) \sim \neg B \vee \neg A \vee C$.

4.2. Igen. A megfelelő logikai törvények alkalmazásával igazolhatók.

Pl. (e) $\neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg Q \vee R) \sim (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \wedge \neg R) \sim (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge Q \wedge \neg R) \sim P \wedge Q \wedge \neg R$.

Vegyük észre, hogy (a) és (b) formulái duális formulák!

4.3.

4.4. Diszjunktív és konjunktív normálforma:

(a) $\neg P \vee Q \vee (\neg P \wedge R)$; $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

(b) $P \wedge Q$

(c) $R \vee (P \wedge Q)$; $(R \vee P) \wedge (R \vee Q)$

(d) $P \vee Q \vee R$.

4.5.

(a) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$

(b) $\neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q \sim \neg P \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee Q \sim (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$

A kapott formula $A \vee \neg A$ alakú, azaz logikai törvény, így a reprezentáló áramköre mindig zárt.

(c) $\neg P$

(d) Az áramkör mindig zárt.

(e) $\neg P$.

4.6. A $(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ diszjunktív normálformula azonos átalakításokkal $(Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ alakra egyszerűsíthető.

4.7.

(a) Ha a B igaz A hamis, akkor a formula értéke hamis.

(b) A $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y \neg P(x,y)$ formulának adható olyan értékelése, hogy az előtag igaz, az utótag hamis legyen. $\forall x \exists y P(x,y)$ igaz, ha egy adott alaphalmaz tetszőleges a elemére a $\exists y P(a,y)$ formula igaz, ami azt jelenti, hogy létezik olyan b elem, amelyre $P(a,b)$ igaz. $\exists x \forall y \neg P(x,y)$ hamis, ha tetszőleges elemre, azaz a-ra is $\forall y \neg P(a,y)$ hamis. Ez utóbbi formula akkor hamis, ha létezik olyan elem, jelöljük c-vel, hogy $\neg P(a,c)$ hamis, azaz $P(a,c)$ igaz. Találtunk tehát olyan értékelést, $P(a,b)$ és $P(a,c)$ igaz értékeket, amelyek esetén az eredeti formula hamis.

(c) Található olyan értékelés, hogy az előtag igaz, az utótag pedig hamis.

4.8.

(a) Nem.

(b) Igen. Ha $P(a,a)$ hamis, akkor a formula értéke igaz.

4.9.

(a) A de Morgan törvény miatt a két formula egyenértékű.

(b) A kondicionálisra vonatkozó törvény alkalmazásával belátható, hogy a két formula egyenértékű.

4.10. A formulákat először, ha szükséges, változó tiszta alakra hozzuk, majd alkalmazzuk a megfelelő kvantorkiemelési törvényeket.

(a) $\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \exists u \forall v P(u,v)$ változó tiszta alak, az egyoldali kvantorkiemelési törvények felhasználásával kapható a prenex alak:

$\exists x \forall y \exists u \forall v (Q(x,y) \wedge P(u,v))$.

(b) $\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \exists u \forall v P(u,v)$

$\forall x \exists y \exists u \forall v (R(x,y) \Rightarrow P(u,v))$

(c) $\forall x \exists y \forall w \exists u((Q(x,y) \wedge \exists w R(w)) \Rightarrow R(u))$
(d) $\exists x \exists y \exists v \forall u \exists w((R(x,y) \Rightarrow P(v)) \Rightarrow R(u,w))$.

5. Logikai következmények

5.1.
(a) $R \Rightarrow \neg Q$
$\neg P \vee Q$

$P \Rightarrow \neg R$

Tételezzük föl, hogy van olyan értékelés, amelynél a premisszák igazak, a konklúzió hamis. Ez utóbbi csak akkor lehetséges, ha P és R is igaz. A második premissza csak akkor igaz, ha Q igaz, de ilyen értékelésnél az első premissza hamis, ami ellentmond a kiinduló feltételünknek. Nem létezik tehát olyan értékelés, amelynél a premisszák igazak, a konklúzió pedig hamis, így a következtetési séma helyes.
Az előző gondolatmenetet alkalmazva a feladat többi része is hasonlóan vizsgálható.
Az (f) kivételével az összes többi helyes séma.

5.2.
(a) Formalizáljuk az állításokat a kijelentés logika nyelvén:
Jelentse J: „Egyetemre járok.”, L: „Elfoglalt leszek.”, F: „Megtanulok franciául.”, A: „Elfelejtem az angol nyelvet.” K: „ Kapok külföldi ösztöndíjat.” A séma a következő:
$J \Rightarrow (L \wedge \neg F)$
$(A \wedge \neg F) \Rightarrow \neg K$

$(A \wedge J) \Rightarrow \neg K$.
Ez a séma helyes, így a konklúzió logikai következménye a premisszáknak.
(b) Helytelen a következtetés.
(c) Nem helyes.
(d) Helyes.
(e) Nem helyes.
(f) Helyes.
(g) Helyes.
(h) Nem helyes.

5.3
(a) Jelölje E: „Veronába utazunk.”, V: „Velencébe utazunk.”, R: „Rómába utazunk.”; a premisszák formulái:
$\neg E \Rightarrow \neg V$
$V \Leftrightarrow R$
$\neg R$
Az első formula helyett használhatjuk a kontrapozíciós szabály alapján az egyszerűbb $V \Rightarrow E$ alakot. Mivel a premisszáknak mindig igaznak kell lenni, így az R hamis, V hamis értékelés adódik, az E lehet igaz is és hamis is. A konklúzió formulája: $(\neg R \wedge \neg V) \wedge (E \vee \neg E)$. Szövegesen interpretálva: „ Sem Rómába, sem Velencébe nem utazunk, de Veronába vagy elmegyünk, vagy nem.
(b) Működik az Internet és meg tudjuk oldani az analízis feladatokat; az nem eldönthető, hogy sok vagy kevés idő alatt.
(c) Dóri és Klári megy a diszkóba, Zsolt nem, Éva pedig vagy megy, vagy nem.

5.4.

(a) Modus ponens,
(b) Indirekt séma,
(c) Kontrapozíció,
(d) Láncszabály,
(e) Diszjunktív szillogizmus.

5.5. Mind az öt következtetési séma helyes. Az első három egyszerűen belátható a kvantorok értékelése alapján. Pl. (b) esetben: ha a P(x) igaz, ez azt jelenti, hogy az adott alaphalmaz valamely a elemére a P(a) igaz; ebben az esetben azonban a konklúzió is igaz.

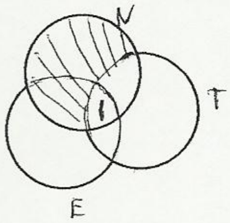
(d) Adott alaphalmazt tekintve, a premissza igaz, ha Q(x,y) a halmaz tetszőleges (a,b) elempárjára igaz. A Q(a,a) is igaz, így a $\forall x Q(x,x)$ konklúzió is igaz.

(e) Az indirekt módszert alkalmazva, tegyük föl, hogy a premisszák igazak, a konklúzió pedig hamis. Adott alaphalmazt tekintve ez azt jelenti, hogy Q(a,a) hamis. Tetszőleges a,b,c elemekre $(Q(a,b) \wedge Q(b,c)) \Rightarrow Q(a,c)$ igaz, $Q(a,b) \Rightarrow \neg Q(b,a)$ hamis. Az utóbbiból Q(a,b) igaz, Q(b,a) is igaz. A második premisszát c helyett alkalmazzuk a-ra: $Q(a,b) \wedge Q(b,a)) \Rightarrow Q(a,a)$, ez azt jelenti, hogy mivel a kondicionális előtagja igaz, Q(a,a) is igaz, ami ellentmond a feltételünknek, így a következtetési séma helyes.

5.6.

(a) Alaphalmaz a négyszögek halmaza. Jelölje N(x): „x négyzet", T(x): „x trapéz", E(x): „x érintőnégyszög". A kapott séma:

$$\begin{array}{lll} \forall x(N(x) \Rightarrow T(x)) & a & N - T = 0 \\ \exists x(E(x) \wedge N(x)) & i & E \cap N \neq 0 \\ \hline \exists x(T(x) \wedge E(x)) & i & T \cap E \neq 0 \end{array}$$



A sémában szereplő formulák kategórikus kijelentések formulái; feltüntettük a betűjelüket és a nekik megfelelő halmazelméleti állításokat. A premisszák Venn- diagramja tartalmazza a konklúzióét is, így a következtetés helyes.

(b) Helyes.
(c) Helytelen. Kiegészítéssel helyessé tehető. (Léteznek halak.)
(d) Kiegészítéssel lesz helyes. (Van matematika szakos főiskolás.)
(e) Nem helyes.
(f) Kiegészítéssel lesz helyes. (Léteznek sportolók.)
(g) Nem helyes.
(h) Kiegészítéssel lesz helyes.(Létezik hettita harcos.)

5.7.

1. $\exists x E(x)$ kiegészítéssel helyessé tehető.
2. $\exists x E(x)$ vagy $\exists x V(x)$ kiegészítéssel helyessé tehető.
3. Nem helyes.

5.8. (a) Nem egyrétű formulákkal írható le, indirekt módszerrel igazolható a helyessége.
(b) Helyes. Nem szillogizmus, de Venn-diagrammal ábrázolható.

5.9. Venn-diagrammal eldönthető, hogy helyes.

5.10. A (g) kivételével mind vizsgálható Venn- diagrammal. A (c)-t kivéve mind helyes.

(g) Alaphalmaz az emberek halmaza. $M(x,y)$: x műveletlenebb mint y. $L(x,y)$: x lenézi y-t.
g: Gábor, k: Károly.

$$\forall x(M(x,k) \Rightarrow L(k,x))$$
$$\forall x(L(x,g) \Rightarrow \neg M(g,x))$$
$$\overline{\neg M(g,k)}$$

A két premissza minden x-re igaz, így az első g-re, a második k-ra is.

$$M(g,k) \Rightarrow L(k,g))$$
$$L(k,g) \Rightarrow \neg M(g,k))$$
$$\overline{\neg M(g,k)}$$

A láncszabályt alkalmazva már könnyen belátható, hogy helyes a következtetés.

5.11. Egyik sem helyes.
5.12. (a) Az édestestvéreknek ugyanaz az édesanyjuk.
Minden tanítónő pedagógus.
(b) 12 és 21 között az egyetlen páros és hárommal osztható szám a 18.

6. Levezetés, a természetes levezetés technikája

6.1 (a) Nem levezetés.
(b) Levezetés, mert az első formula az 1. axiómából adódik a megfelelő helyettesítéssel. A második formula nyílt premissza, a harmadik pedig az előző kettőből kapható a modus ponens alkalmazásával.

6.2. (a) Nem levezetés. (Az általánosítás szabályát, majd a 12. axiómát alkalmazva, végül a a modus ponens segítségével levezethető az első formulából a második.)
(b) Levezetés. Az első formula a 13., a második az 1. axiómából kapható; alkalmazva rájuk a modus ponens-t, adódik a harmadik formula.

6.3.(a) $(A \vee A) \Rightarrow A$. Felhasználjuk, hogy az $A \Rightarrow A$ formula levezthető, (a levezetés megtalálható a jegyzetben) és alkalmazzuk a 6. axiómát:
$(A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \vee A) \Rightarrow A)))$
$A \Rightarrow A$
$(A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \vee A) \Rightarrow A))$
$A \Rightarrow A$
$(A \vee A) \Rightarrow A$. A modus ponens kétszeri felhasználásával kaptuk a kívánt formulát.

(d) $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$.
$(A \wedge B) \Rightarrow A$, 4. axióma
$A \wedge B$
A
$(A \wedge B) \Rightarrow B$ 5. axióma
$A \wedge B$
B
$A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$ 3. axióma, a részletesebb indoklást és a modus ponens további alkalmazásait az olvasóra bízzuk.

6.4. (a) A konjunkció eltávolítása és a dedukció tétel alkalmazásával adódik:
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \mid\!-\!- C$. Kétszer alkalmazzuk az azonosság törvényét:
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \mid\!-\!- A \Rightarrow B$