1. előadás 1. tétel IX. 14.

Szabad vektorok vektortere

Def.: Az egyenes két pontja szakaszt határoz meg. Ha a pontok sorrendjét is megadjuk, irányított szakaszról beszélünk.

Az O kezdőpontú A végpontú irányított szakasz jelölése: $\overrightarrow{OA}$, szemléltetése:

Tekintsük a sík vagy tér irányított szakaszainak S halmazát! S halmazon értelmezzük a köv relációt:

Def.: τ (tau): $\overrightarrow{OA}$ párhuzamosan eltolható $\overrightarrow{O'A'}$ -ba.

Könnyen belátható, hogy τ rendelkezik az S halmazon a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságokkal, tehát ekvivalenciareláció. Ezért létrehozza az S halmaznak az osztályozását.

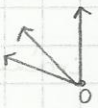
Def.: A sík v. tér irányított S halmazán értelmezett τ ekvivalenciarelációihoz tartozó ekvivalenciaosztályokat vektornak nevezzük.

Mj.: Ez a definíció összhangban van a vektor következő ismert definíciójával.

Def.: A sík v. tér irányított szakaszait vektornak nevezzük, megállapodva abban, hogy párhuzamos eltolással egymásba átvihető irányított szakaszok ugyanazt a vektort jelentik.

Mj.: A mi felfogásunkban az irányított szakaszok a vektor reprezentánsai, képviselői.

A def. szerint a sík v. tér ∀ vektora egyetlen tetszés szerint választható O pontból kiinduló irányított szakasszal reprezentálható.



A vektorokat az abc kisbetűivel jelöljük és valamilyen módon megkülönböztetjük a skalártól.

- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ v. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$
- nyomtatásban: kövéren szedik
- az abc kisbetűivel jelölik a vektorokat, a görög —"— a skalárokat.

A térbeli vektorok halmazát R_3-mal, a síkbeli vektorok halmazát R_2-vel és az egy egyenesbe eső vektorok halmazát R_1-gyel jelöljük.

A vektort megadhatjuk a reprezentánsait jellemző adatokkal. Ezek a következők:

a., a vektor hossza, ill. abszolútértéke (nagysága)
→ez nem negatív valós szám

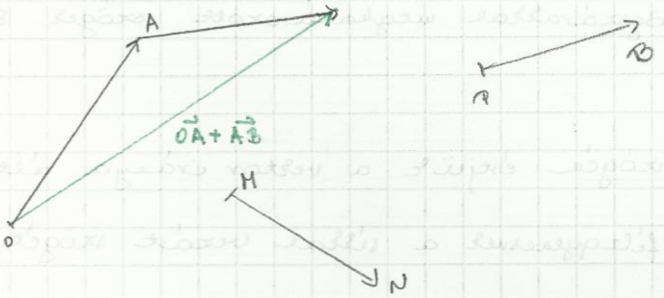
b., a vektor iránya

Def.: Azt a vektort, amely reprezentánsainak kezdő- és végpontja egybeesik, zérusvektornak nevezzük, és $\underline{0}$-val jelöljük.

Műveletek vektorokkal:

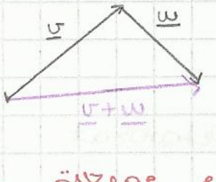
A sík v. tér irányított szakaszainak S halmazán beszélhetünk két irányított szakasz összegéről is, de csak akkor, ha a második irányított szakasz kezdőpontja egybeesik az első végpontjával. Ekkor a két irányított szakasz összege az első kezdőpontjából a második végpontjába mutató irányított szakasz.

Pl.:

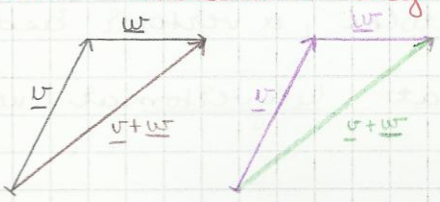


$(S,+)$ parciális (részleges) algebrai struktúra, mert vannak, amelyek összeadhatók, mások nem.

Def.: $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok összegén értjük és $\underline{v}+\underline{w}$-vel jelöljük azt a vektort, amelynek egy reprezentánsa a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektor egy-egy megfelelő (összeadható) reprezentánsának, mint irányított szakaszoknak az összege.



Tétel: Két vektor összege egyértelműen meghatározott, azaz független az őket reprezentáló összeadható irányított szakaszok megválasztásától.



→ $\underline{w}$-nek reprezentánsai

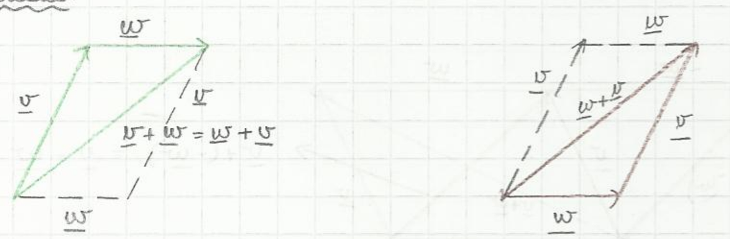
||-an eltolható ⇒ egyértelműen meghatározott.

R_3: A továbbiakban a térbeli vektorok R_3 halmazában vizsgálódunk.

Tétel: $(R_3, +)$ algebrai struktúra Ábel-csoport (modulus)
↳ algebrai művelet

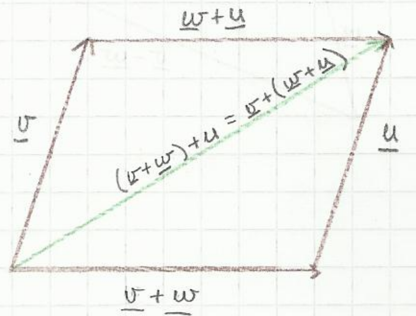
BIZ.: Azt kell belátni, h R_3-ban az + komm, assz és invertálható.
↳ ∃ a struktúrának neutrális eleme és inverze

1., komm:



A két Δ egybevágó, közben megegyeznek az oldalak. A vektorok paralelogramma módszerrel adhatók össze. A két Δ párhuzamosan eltolható.

2., assz:



$\underline{v}+(\underline{w}+\underline{u})=(\underline{v}+\underline{w})+\underline{u}$

3., invertálható:

$\underline{0}$-ra és $\forall\ \underline{v}$ $(\underline{v}\in R_3)$ teljesül: $\underline{v}+\underline{0}=\underline{v}$ $(\underline{0}+\underline{v}=\underline{v})$

A zérusvektor az összeadás neutrális eleme, azaz az additív zérus. $\forall\ \underline{v}$ $(\underline{v}\in R_3)$-ra teljesül $\underline{v}$-nak ∃ ellentettvektora $(-\underline{v})$.

A két vektorra teljesül: $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$.

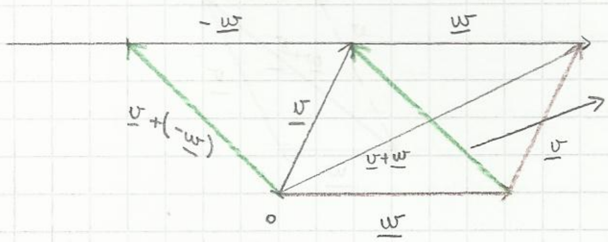
$\underline{v}$ additív inverze a $-\underline{v}$.

A tétel IGAZ!

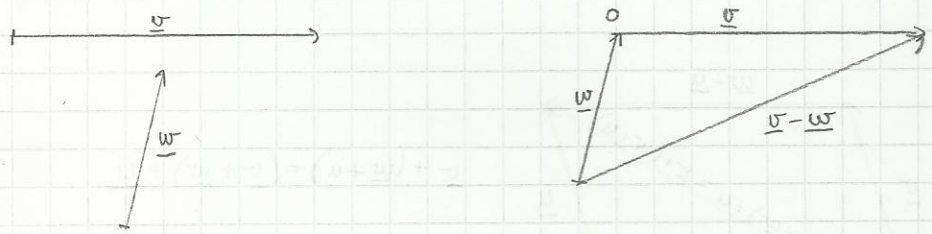
Vektorok különbsége, kivonása:

$\underline{v}$ és $\underline{w}$ különbségén értjük:

$$\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-\underline{w})$$



Közös O-pontból felmérjük $\underline{v}$ és $\underline{w}$ egy reprezentánsát, összekötjük a végpontokat, és a különbségvektor a kisebbítendő felé mutat.



Párhuzamosan eltoljuk őket közös kezdőpontba

Könnyen belátható, h. teljesülnek az ún. Δ-egyenlőtlenségek:

$$|\underline{v}| + |\underline{w}| \geq |\underline{v} + \underline{w}|$$

$$\big||\underline{v}| - |\underline{w}|\big| \leq |\underline{v} - \underline{w}|$$

Vektorok szorzása skalárral: (valós számmal)

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{v} \in \mathbb{R}_3$

Def: $\underline{v}$ a-szorosán értjük és $a \cdot \underline{v}$-vel jelöljük azt a vektort, amelynek hossza $|a \cdot \underline{v}| = |a| \cdot |\underline{v}|$, iránya pedig a $\underline{v}$ irányával megegyezik, ha $a > 0$, iránya tetszőleges, ha $a = 0$ és az iránya ellentétes a $\underline{v}$ irányával, ha $a < 0$.

Mj.: $\mathbb{R}_3$-ban a skalárral való szorzás nem algebrai művelet.

Mj.: A def-ből következik: $a \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot a$. Ezt a szorzást nevezzük skalárral való szorzásnak.

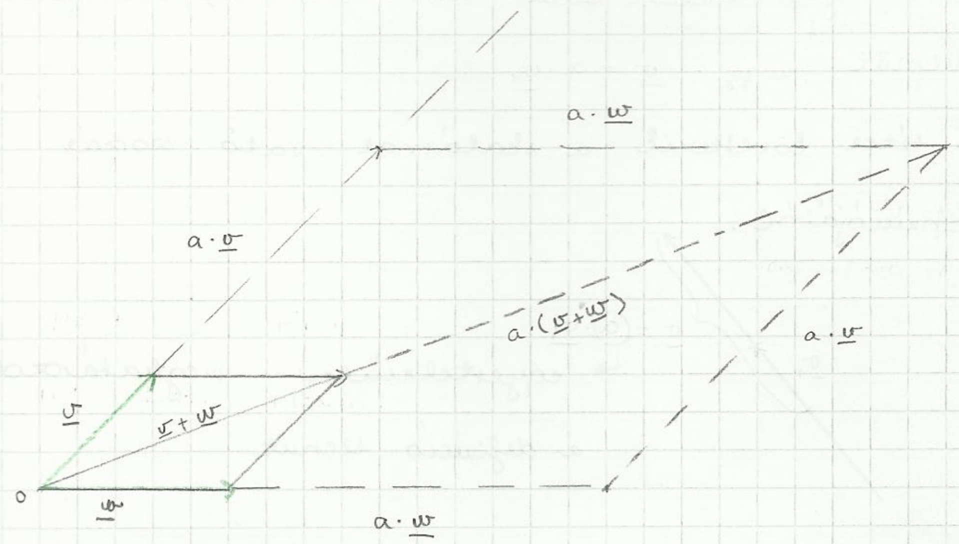
Könnyű belátni, h. teljesülnek a következő tulajdonságok:

1., $a(\underline{v} + \underline{w}) = a \cdot \underline{v} + a \cdot \underline{w}$

2., $(a + b)\,\underline{v} = a \cdot \underline{v} + b \cdot \underline{v}$

3., $(a \cdot b)\,\underline{v} = a \cdot (b \cdot \underline{v}) = b\,(a \cdot \underline{v})$

4., $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$



$a \cdot \underline{v} + a \cdot \underline{w} = a \cdot (\underline{v} + \underline{w})$

A többi hasonlóan belátható!

Térbeli vektorok R_3 halmaza az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve vektorteret alkot a valós számok teste fölött.

A síkbeli vektorok R_2 halmaza is vektorteret alkot ezen két műveletre nézve a valós számok teste fölött.

R_2 vektortér altere R_3-nak.

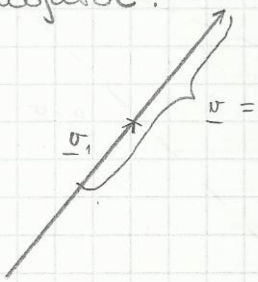
Az egy egyenesbe eső (azaz az egymással párhuzamos) vektorok R_1 halmaza szintén vektorteret alkot az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve a valós számok teste felett. Ez a vektortér altere szintén R_3-nak.

(Ha az egyenes benne van a síkban $\Rightarrow R_1$ altere R_2-nek is.)

Teljesülnek a következő tételek:

Tétel: Ha $\underline{v_1}$ nem zérusvektor ($\underline{v_1} \neq \underline{0}$) akkor az általa meghatározott egyenes bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen írható fel a $\underline{v_1}$ lineáris kombinációjaként. Azaz egyetlen olyan valós szám van ($a_1 \in R$), amelyre teljesül, hogy $\underline{v} = a \cdot \underline{v_1}$

BIZ.: A tétel következik a skalárral való szorzás definíciójából.



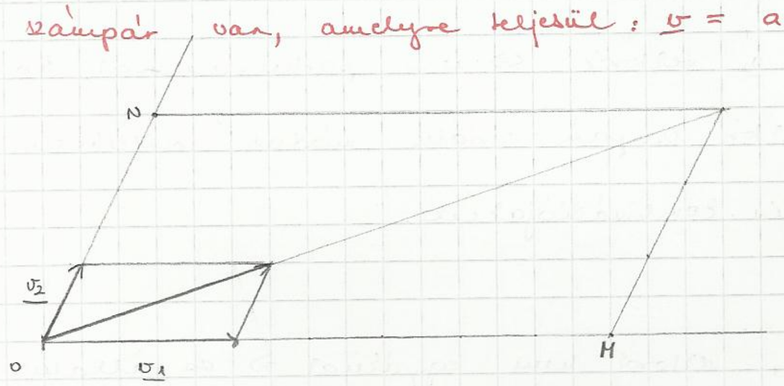
$\underline{v} = a \cdot \underline{v_1}$

↳ egyértelműen meghatározott a definíció szerint

Következmény: Ha $\underline{v_1} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} = a \cdot \underline{v_1}$ egyenlőség csupán $a=0$ esetén teljesül. ($\underline{v_1}$ lineáris kombinációjaként triviális módon állítható elő a $\underline{0}$.)

Tétel: Ha $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ nem párhuzamos vektorok $\Rightarrow$ az általuk meghatározott sík $\parallel$ $\underline{v}$ vektora egyértelműen írható fel a $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ lineáris kombinációjaként, azaz egyetlen olyan rendezett $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ számpár van, amelyre teljesül: $\underline{v} = a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2}$

BIZ.:



$\vec{OM} = a_1 \cdot \underline{v_1}$ az előző tétel értelmében
$\vec{ON} = a_2 \cdot \underline{v_2}$ — " —
$\Big\} \; \underline{v} = a_1 \cdot \underline{v_1} + a_2 \cdot \underline{v_2}$

Mivel $\underline{v}$ végpontján keresztül $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ vektorral is egy $\parallel$ egyenes húzható, ezért ez az előállítás egyértelmű.

Következmény: Ha $\underline{v_1} \nparallel \underline{v_2} \Rightarrow \underline{0} = a_1 \cdot \underline{v_1} + a_2 \cdot \underline{v_2}$ egyenlőség csupán akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = 0$ teljesül. A zérusvektort csak triviális módon tudjuk előállítani az a_1 és a_2 lineáris kombinációjaként.

2. előadás

Ha $\underline{v}_1 \nparallel \underline{v}_2 \Rightarrow a_1 \cdot \underline{v}_1 + a_2 \cdot \underline{v}_2 = 0$ csupán $a_1 = a_2 = 0$ esetén teljesül.

Ellenkező esetben pl.: $a_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{v}_2 = -\frac{a_1}{a_2} \cdot \underline{v}_1$

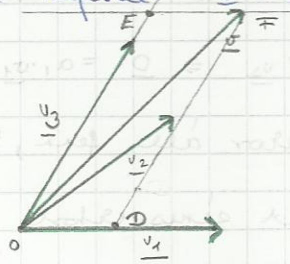
Ebből az következik, hogy $\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2$ a feltevéssel ellentétben. Tehát $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 = 0$ $a_1 = a_2 = 0$ esetén áll fenn. $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$

Igaz az állítás megfordítása is! Érvényes a köv tétel:

Tétel: $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok $\Leftrightarrow$ nem párhuzamosak, ha a zérusvektor csupán triviális módon állítható elő ezek lin. kombinációjaként.

Tétel: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok nem egysíkúak $\Rightarrow$ az általuk kifeszített tér $\forall$ $\underline{v}$ vektora egyértelműen állítható elő a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lin. kombinációjaként. Azaz egyetlen olyan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ rendezett számhármas létezik, amelyre teljesül: $\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3$

BIZ.:



Húzzuk a $\underline{v}_3$ ||-t a $\underline{v}$ végpontján át. Ez valahol döfi (D) a $\underline{v}_1$ $\underline{v}_2$ síkját. Az $\vec{OD}$ az előző tétel értelmében egyértelműen írható fel $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$ alakban, mert $\underline{v}_1 \nparallel \underline{v}_2$. (Ellenkező esetben a 3 vektor egysíkú lenne.)

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$\vec{OD}$ kössünk $\parallel$-t a $\underline{v}$ végpontján keresztül.

Az első tétel értelmében egyértelműen írható fel:

$\vec{OE} = a_3 \underline{v_1}$ $\quad (a_3 \in \mathbb{R}$ és $\underline{v_3} \neq \underline{0})$

$\underline{v} = \vec{OD} + \vec{DF} = a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + a_3 \underline{v_3}$

$$\underline{v} = a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + a_3 \underline{v_3}$$

Mivel egyetlen olyan paralelogrammák által határolt test (paralel-epipedon) létezik, amelynek élei a $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ vektorokkal $\parallel$-ak, testátlója pedig a $\underline{v}$, $\Rightarrow$ ez az előállítás egyértelmű.

Következmény: Ha $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ és $\underline{v_3}$ nem egysíkúak, $\Rightarrow$ a $\underline{0} = a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + a_3 \underline{v_3}$ egyenlőség csupán $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ esetén áll fenn.

Pl.: $a_3 \neq 0$

$\underline{v_3} = -\frac{a_1}{a_3} \underline{v_1} - \frac{a_2}{a_3} \underline{v_2}$ ez pedig azt jelenti, hogy a $\underline{v_3}$ benne van a $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ által meghatározott síkban, azaz $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ és $\underline{v_3}$ egysíkúak, állításunkkal ellentétben.

Igaz az állítás megfordítása:

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ $\Leftrightarrow$ nem egysíkúak, ha a zérusvektort csupán triviális módon tudjuk előállítani azok lin. kombinációjaként.

Megjegyzés: A tér $\forall$ 3 nem egysíkú vektora, a térbeli vektorok valós számok teste fölötti vektorterének egy generátorrendszerét, sőt, egy bázisát adják.

Két vektor skaláris (belső) szorzata: 2. tétel

Def.: $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok skaláris szorzatán értjük ($\underline{v} \cdot \underline{w}$ -vel jelöljük) a következőt:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} := |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}, \underline{w})$$

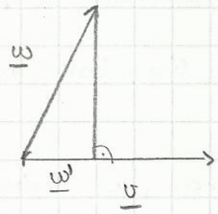
Mj.: $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok szögét $(\underline{v}, \underline{w})$ - vel jelöljük.

Mj.: Ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok közül legalább az egyik zérusvektor, akkor a két vektor szöge nem egyértelmű, ez azonban nem zavaró, mert $|\underline{0}| = 0$ és így a def-ban szereplő szorzat legalább egyik tényezője 0, így a skaláris szorzat is 0.

Mj.: A skaláris szorzás sem a sík, sem a térbeli vektorok körében nem algebrai művelet. (Két vektorhoz skalárt rendel)

Geometriai jelentése:

A $\underline{v}$ vektor hosszának a szorzata a $\underline{w}$ vektor $\underline{v}$-ra eső merőleges vetületvektorának előjeles hosszával.



$w' = \underline{v}^\circ \cdot a \qquad (a \in \mathbb{R})$

$a = |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}, \underline{w}) = |\underline{v}^\circ||\underline{w}| \cos(\underline{v}^\circ, \underline{w}) \overset{\text{def. sz.}}{=} \underline{v}^\circ \cdot \underline{w}$

$\boxed{\underline{w}' = \underbrace{(\underline{v}^\circ \cdot \underline{w})}_{a} \cdot \underline{v}^\circ}$ → vetületvektor