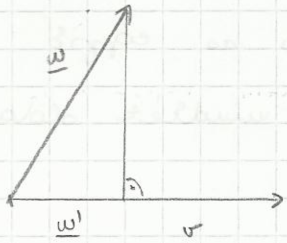
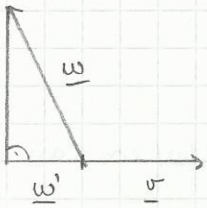


$$|\underline{v}| \cdot |\underline{w}'| = \underline{v} \cdot \underline{w}$$



$$\underline{v} \cdot \underline{w} = -|\underline{v}| \cdot |\underline{w}'|$$

A skaláris szorzás tulajdonságai:

1; $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$

2; $\underline{v} \cdot \underline{v}^\circ = |\underline{v}|$

3; $\underline{v}^\circ \cdot \underline{w}^\circ = \cos(\underline{v}^\circ, \underline{w}^\circ) = \cos(\underline{v}, \underline{w})$

4., $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$

5; $a \cdot (\underline{v} \cdot \underline{w}) = (a \cdot \underline{v}) \cdot \underline{w}$

6; $\underline{v} \cdot (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{u}$

7; $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$

8; $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

1, 2, 3., tulajdonság a skaláris szorzás def-jából következik.

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}| \cdot \underbrace{\cos(\overbrace{\underline{v}, \underline{v}}^{0^\circ})}_{1} = |\underline{v}|^2$$

valós számoknál a szorzás komm.

4., $\underline{v} \cdot \underline{w} \overset{\text{def.}}{=} |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}, \underline{w}) = |\underline{w}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\underline{w}, \underline{v}) =$

$\Downarrow$

két vektor szöge nem irányított
$\cos(\underline{v}, \underline{w}) = \cos(\underline{w}, \underline{v})$

$\overset{\text{def.}}{=} \underline{w} \cdot \underline{v}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v} \quad \forall\ \underline{v}, \underline{w}$ -re

$\Downarrow$

A skaláris szorzás kommutatív.

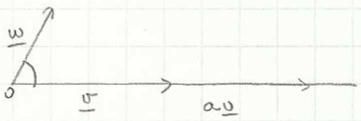
5, Ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ között legalább az egyik zérusvektor, akkor igaz a tulajdonság, mert mindkét oldal nulla.

Feltehetjük: $\underline{v}, \underline{w} \neq 0$.

a, ha $a = 0$: Igaz a tulajdonság, mert az egyenlőség mindkét oldala 0-val egyenlő.

b, ha $a > 0$:

$$a(\underline{v}\cdot\underline{w}) \overset{def.}{=} a\cdot|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos(\underline{v},\underline{w}) = a\cdot|\underline{v}||\underline{w}|\cos(a\underline{v},\underline{w}) =$$



$$= |a\underline{v}||\underline{w}|\cos(a\underline{v},\underline{w}) \overset{def.}{=} (a\underline{v})\cdot\underline{w}$$

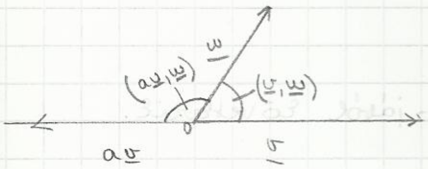
$\downarrow$
skaláris szorzat
def. alapján

c, ha $a < 0$:

$$a(\underline{v}\cdot\underline{w}) \overset{def.}{=} a\cdot|\underline{v}||\underline{w}|\cos(\underline{v},\underline{w}) = -a|\underline{v}||\underline{w}|\cos(a\underline{v},\underline{w}) =$$

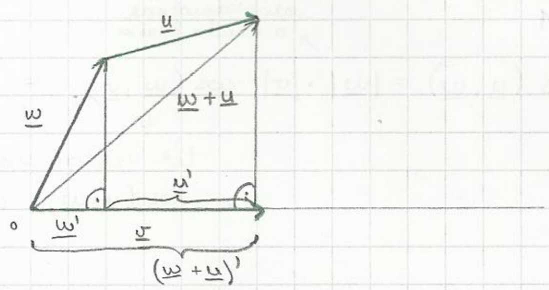
$$= |a|\cdot|\underline{v}||\underline{w}|\cdot\cos(a\underline{v},\underline{w}) \overset{def.}{=} |a\underline{v}||\underline{w}|\cos(a\underline{v},\underline{w}) =$$

$$= (a\cdot\underline{v})\cdot\underline{w}$$



cosinuszuk egy előjelben különböznek.

6,



Vetítsük le a $\underline{v}$-re a $\underline{w}$-t, $\underline{u}$-t és $\underline{w}+\underline{u}$ vektort!

Az ábráról leolvasható:

$$(\underline{w}+\underline{u})' = \underline{w}' + \underline{u}'$$

$$(\underline{v}^\circ \cdot \underline{w})\,\underline{v}^\circ + (\underline{v}^\circ \cdot \underline{u})\,\underline{v}^\circ = \left[\underline{v}^\circ (\underline{w}+\underline{u})\right] \cdot \underline{v}^\circ$$

$$\left[\underline{v}^\circ (\underline{w}+\underline{u})\right] \underline{v}^\circ = \left[(\underline{v}^\circ \cdot \underline{w}) + (\underline{v}^\circ \cdot \underline{u})\right] \underline{v}^\circ$$

$v^\circ(\underline{w}+\underline{u}) = (\underline{v}^\circ \cdot \underline{w}) + (\underline{v}^\circ \cdot \underline{u})$ / szorozzuk meg mindkét oldalt $|\underline{v}|$-vel!

$$\underbrace{(|\underline{v}|\,\underline{v}^\circ)}_{\underline{v}} \cdot (\underline{w}+\underline{u}) = \underbrace{(|\underline{v}| \cdot \underline{v}^\circ)}_{\underline{v}} \cdot \underline{w} + \underbrace{(|\underline{v}|\,\underline{v}^\circ)}_{\underline{v}} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{v} \cdot (\underline{w}+\underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{u}$$

Igaz a tulajdonság $\forall$ $\underline{v}, \underline{w}$ és $\underline{u}$ vektorra.

7, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 \geq 0$ ✓

8, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 \iff \underline{v} = \underline{0}$

Mj.: Nem beszélhetünk a skaláris szorzás asszociatív tulajdonságáról.

$$\underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{w})}_{a} \cdot \underline{u} \neq \underline{v} \cdot \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{u})}_{b}$$

A második szorzás már nem skaláris, hanem skalárral való szorzás.

Gyakran a skaláris szorzást vektorok merőlegességének eldöntésére használjuk. Érvényes a következő tétel:

Tétel: Két vektor $\iff$ merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

BIZ.: Legyen $\underline{v}, \underline{w}$.

Ha a két vektor közül legalább az egyik zérusvektor $\Rightarrow$ igaz a tétel állítása, mert a zérusvektor $\forall$ vektorral merőleges $\measuredangle$-et zárhat be, így mondhatjuk, hogy ⊥ rá.

Tfh.: $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$.

a) ! $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \Rightarrow \underbrace{|\underline{v}|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{|\underline{w}|}_{\neq 0} \underbrace{\cos(\underline{v}, \underline{w})}_{= 0} = 0$

$$\cos(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

b) ! $\underline{v} \perp \underline{w} \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = \underbrace{|\underline{v}|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{|\underline{w}|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\cos(\underline{v}, \underline{w})}_{= 0} = 0.$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

Vektorok vektoriális szorzata:

Def.: $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok vektoriális szorzatán értjük és $\underline{v} \times \underline{w}$-vel (kereszt) jelöljük azt a vektort, amelyre

1) $|\underline{v} \times \underline{w}| := |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \sin(\underline{v}, \underline{w})$ (hossza)

2) $\underline{v} \times \underline{w} \perp \underline{v}$-ra és $\underline{w}$-ra is, $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}$ ebben a sorrendben jobb-rendszert alkot.

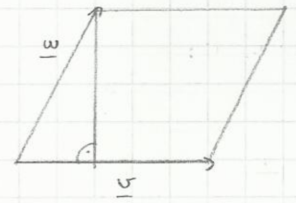
Mj.: Ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ közül legalább az egyik zérusvektor, ⇒ a két vektor szöge nem egyértelműen meghatározott, de ez nem zavaró, mert ekkor a vektoriális szorzat abszolútértéke 0, így a vektoriális szorzat zérusvektor.

Mj.: A vektoriális szorzás a térbeli vektorok körében algebrai művelet.

Geometriai jelentése:

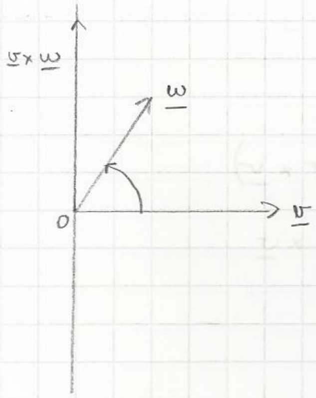
1) $\underline{v} \nparallel \underline{w} \Rightarrow |\underline{v} \times \underline{w}|$ jelenti a két vektor által kifeszített paralelogramma területének a mérőszámát.

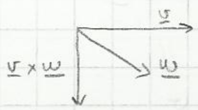
(Ezért is szokták a vektoriális szorzást területvektornak nevezni.)



$t = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin(\underline{v},\underline{w}) = |\underline{v} \times \underline{w}|$

2)





Ha $\underline{v}\times\underline{w}$ irányából nézzük $\Rightarrow$ $\underline{v}$ a $\underline{w}$-ba az óramutató járásával ellentétes irányba egyenesszögnél kisebb szöggel forgatható el. Ez jelenti azt, hogy $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{v}\times\underline{w}$ jobb-rendszert alkot.

Tulajdonságai:

1) $\underline{v}\times\underline{w} \neq \underline{w}\times\underline{v}$

$\underline{v}\times\underline{w} = -(\underline{w}\times\underline{v})$

2) $a(\underline{v}\times\underline{w}) = (a\underline{v})\times\underline{w}$ $(a \in \mathbb{R})$

3) a, $\underline{v}\times(\underline{w}+\underline{u}) = \underline{v}\times\underline{w} + \underline{v}\times\underline{u}$; b, $(\underline{w}+\underline{u})\times\underline{v} = (\underline{w}\times\underline{v}) + (\underline{u}\times\underline{v})$

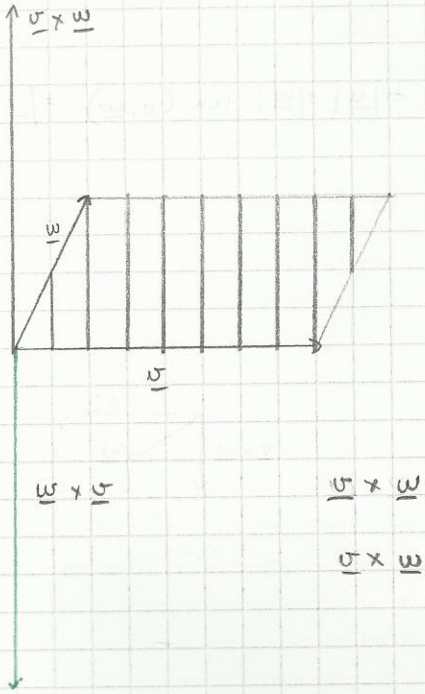
4) $\underline{v}\times\underline{v} = \underline{0}$

$\forall\ \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in \mathbb{R}_3$

IX.28.

3. előadás

Biz.: 1)



$\underline{v} \times \underline{w} = -(\underline{w} \times \underline{v})$

$\underline{v} \times \underline{w} \neq \underline{w} \times \underline{v}$

2) Ha a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ közül legalább az egyik zérusvektor, $\Rightarrow$ a tulajdonság teljesül, hiszen mind a két oldal zérusvektor.

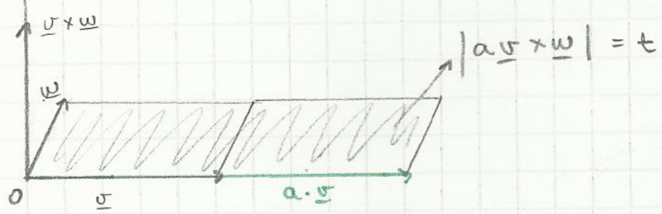
Feltehetjük, h. $\underline{v}$ és $\underline{w} \neq \underline{0}$

a; $a = 0$:

Igaz a tulajdonság, hiszen mindkét oldal most is zérusvektorral egyenlő.

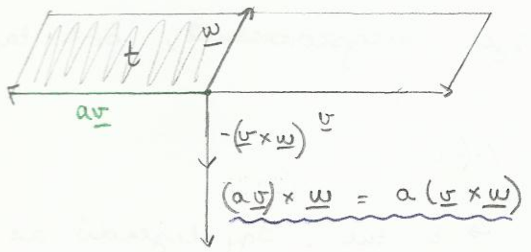
$a(\underline{v} \times \underline{w}) = (a\underline{v}) \times \underline{w}$

b; $a > 0$:



Vegyük $a \cdot \underline{v}$-t!

c, $a<0$:

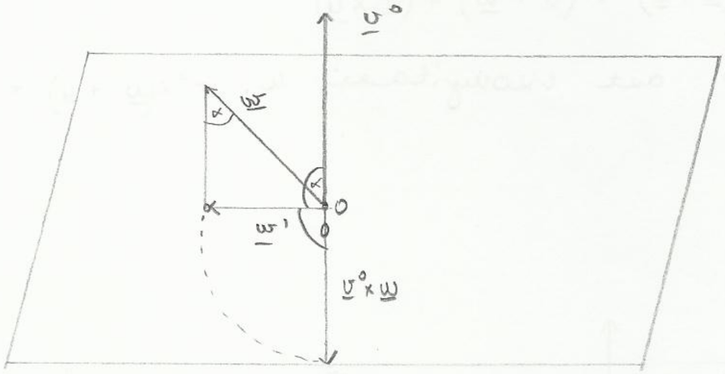


$|a\underline{v}\times\underline{w}| = t$

Tétel: $\underline{v}\times\underline{w} = |\underline{v}|\cdot\underline{v}^\circ\times\underline{w} \overset{2.\text{tul}}{=} |\underline{v}|\cdot(\underline{v}^\circ\times\underline{w})$

$\underline{v}^\circ\times\underline{w}$

Fektessünk az O ponton át $\underline{v}^\circ$-ra $\perp$ síkot.



- Vetítsük a $\underline{w}$-t $\perp$-en a síkra!
- Forgassuk el a $\underline{w}'$-t a síkban 90°-kal pozitív irányban.
- Azt állítjuk, h. a keletkezett vektor $= \underline{v}^\circ\times\underline{w}$
- Ha $\underline{w} \parallel \underline{v}^\circ \Rightarrow$ igaz az állítás, hiszen ekkor $\underline{v}^\circ\times\underline{w} = \underline{0}$.
- Feltételezzük, hogy $\underline{w} \nparallel \underline{v}^\circ$.

$|\underline{w}'| = |\underline{w}|\cdot\sin\alpha = \underbrace{|\underline{v}^\circ|}_{1}|\underline{w}|\cdot\sin(\underline{v}^\circ,\underline{w}) \overset{def}{=} |\underline{v}^\circ\times\underline{w}|$

$|\underline{v}^\circ\times\underline{w}| = |\underline{v}^\circ||\underline{w}|\sin(\underline{v}^\circ,\underline{w})$

A konstrukcióból következik, h. $\underline{v}^\circ, \underline{w}, \underline{v}^\circ\times\underline{w}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

3) elegendő az egyiket, pl.: a_i-t bizonyítani, mert ha ezt a tulajdonságot (-1)-gyel megszorozzuk, b_i-t kapjuk.

$$\underline{v} \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} \times \underline{w}) + (\underline{v} \times \underline{u}) \qquad / \cdot (-1)$$

1. tul. ↘

$$(\underline{w} + \underline{u}) \times \underline{v} = (\underline{w} \times \underline{v}) + (\underline{u} \times \underline{v})$$

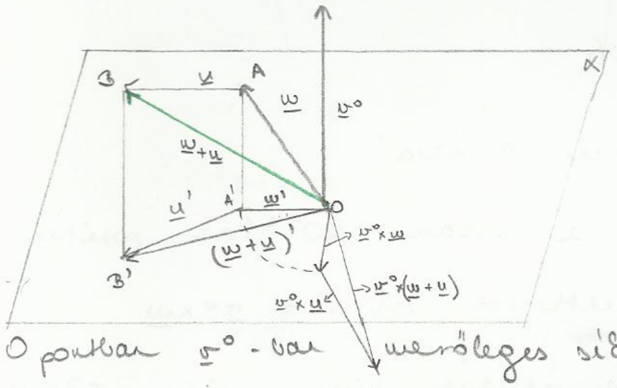
→ b_i tul. Így elegendő az a_i-t bizonyítani

a_i Elegendő azt bizonyítani, hogy $\underline{v}^\circ \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v}^\circ \times \underline{w}) + (\underline{v}^\circ \times \underline{u})$. Ha ezt megszorozzuk $|\underline{v}|$-vel:

$$(\underbrace{|\underline{v}| \cdot |\underline{v}^\circ|}_{\underline{v}}) \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underbrace{|\underline{v}| \cdot \underline{v}^\circ}_{\underline{v}}) \times \underline{w} + (\underbrace{|\underline{v}| \underline{v}^\circ}_{\underline{v}}) \times \underline{u}$$

$$\underline{v} \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} \times \underline{w}) + (\underline{v} \times \underline{u})$$

Valóban elegendő azt bizonyítani, h. $\underline{v}^\circ \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v}^\circ \times \underline{w}) + (\underline{v}^\circ \times \underline{u})$.



- Illesszünk O pontban $\underline{v}^\circ$-val merőleges síkot.
- $\underline{w}$ vegyük fel O-ból kiinduló reprezentánssal, $\underline{u}$-t pedig a végpontjából kiinduló reprezentánssal.
- Vetítsük $\underline{\alpha}$-en α síkra a $\underline{w}$, $\underline{u}$ és $\underline{w}+\underline{u}$-t is.
- Forgassuk el O pont körül az OA'B'A-et 90°-kal pozitív irányban.

Ábráról is leolvasható: $\underline{v}^\circ \times (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v}^\circ \times \underline{w}) + (\underline{v}^\circ \times \underline{u})$

4.) $\underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$

Ez a tulajdonság a definícióból következik.

(A bezárt szög $0°$. $\Rightarrow$ $\sin 0° = 0$.)

Tétel: A vektorok vektoriális szorzása nem asszociatív tulajdonságú.

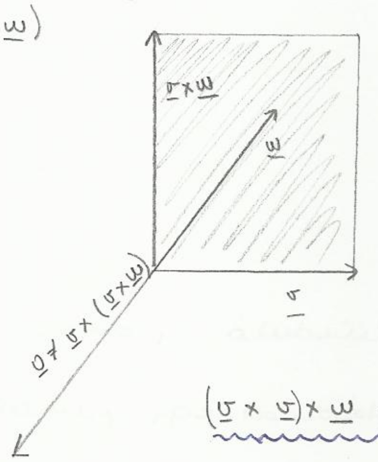
BIZ.: Elegendő egy példa:

$\underline{v}, \underline{v}, \underline{w}$

a; $(\underline{v} \times \underline{v}) \times \underline{w}$, b; $\underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{w})$

a; $\underbrace{(\underline{v} \times \underline{v})}_{\underline{0}} \times \underline{w} = \underline{0}$

b; $\underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{w})$



$(\underline{v} \times \underline{v}) \times \underline{w} \neq \underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{w})$

Gyakran a vektoriális szorzást a vektorok ∥-ságának eldöntésére használják, érvényes ugyanis a köv. tétel:

Tétel: Két vektor $\Leftrightarrow$ ∥, ha a vektoriális szorzatuk zérusvektor.

BIZ.: Legyenek $\underline{v}, \underline{w}$ vektorok.

Ha a két vektor közül legalább az egyik zérusvektor $\Rightarrow$ igaz a tétel állítása, hiszen a zérusvektor bármely vektorral ∥-nak is tekinthető.

Feltehetjük, h. $\underline{v}, \underline{w} \neq \underline{0}$.

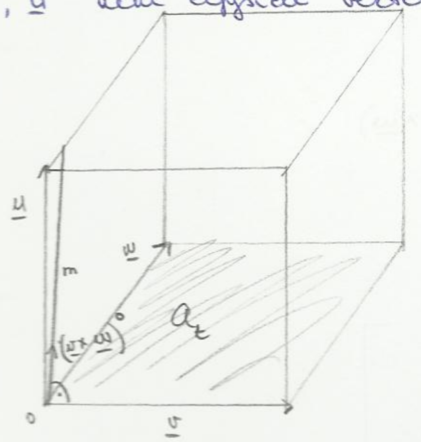
a; $\underline{v} \parallel \underline{w} \Rightarrow |\underline{v}\times\underline{w}| \overset{def.}{=} |\underline{v}||\underline{w}|\cdot \sin(\underbrace{\underline{v},\underline{w}}_{0^\circ \text{ v. } 180^\circ}) = 0. \Rightarrow \underline{v}\times\underline{w} = \underline{0}$

b; $\underline{v}\times\underline{w}=\underline{0} \Rightarrow |\underline{v}\times\underline{w}| = \underbrace{|\underline{v}|}_{\neq 0}\underbrace{|\underline{w}|}_{\neq 0} \underbrace{\sin(\underline{v},\underline{w})}_{0} = 0. \Rightarrow \underline{v}\parallel\underline{w}$

3. tétel

Három vektor vegyes szorzata:

Legyenek $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u}$ nem egysíkú vektorok.



- Vegyük fel őket közös O pontból kiinduló reprezentánsával.
- A 3 vektor nem egysíkú ⇒ meghatároznak egy paralelogrammákkal határolt testet, egy paralelepipedont.
- Ennek a paralelepipedonnak a térfogatát pozitívnak tekintjük, ha $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Ellenkező esetben a térfogat negatív. Így beszélhetünk a ‚test' előjeles térfogatáról.

Határozzuk meg ezt az előjeles térfogatot.

Térfogat:

$V = a_t \cdot m.$