$a_t = |\underline{v} \times \underline{w}|$

m: Állítsuk $\underline{v}$ és $\underline{w}$ síkjára merőlegest!

$m = |a\,(\underline{v} \times \underline{w}^{\circ})^{\circ}|$

$\underline{u}'$(vetületvektor $\underline{v} \times \underline{w}$ - u) $= \big[\underbrace{(\underline{v} \times \underline{w})^{\circ} \cdot \underline{u}}_{a}\big] \cdot (\underline{v} \times \underline{w})^{\circ}$ (vetületvektor előállítása lsd. skalár)

$V = (|\underline{v} \times \underline{w}|) \cdot (\underline{v} \times \underline{w})^{\circ} \cdot \underline{u} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$

$(\underline{v}^{\circ}\,|\underline{v}| = \underline{v})$

$V = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} \rightarrow$ a paralelepipedon előjeles térfogata.

Def.: $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$ vektorok vegyes szorzatán értjük és $\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u}$-vel jelöljük a következő skalár értéket:

vektoriális, skaláris

$\underbrace{\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u}}_{\text{skalár}} := \underbrace{(\underline{v} \times \underline{w})}_{\text{vektor}} \cdot \underset{\text{vektor}}{\underline{u}}$

A előzőekben bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel: 3 vektor vegyes szorzata egyenlő a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatával.

Mj.: Akkor is érvényes a tétel, ha a 3 vektor között zérusvektor is található vagy egysíkúak a vektorok.

$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = \underline{w}\,\underline{u}\,\underline{v} = \underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}$ ⇒ mindhárom ugyanannak a paralelopepidedon előjeles térfogatát adja.

(ez lesz az alap sík)

Megállapíthatjuk: 3 vektor vegyes szorzatának képzésekor szabad az elemeket ciklikusan permutálni.

$-\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = \underline{w}\,\underline{v}\,\underline{u}$

Ha nem ciklikus permutációval cserélgetünk, előjelben el fog térni

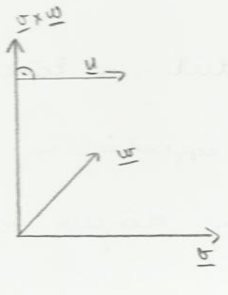
$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = -\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = -\underline{w}\,\underline{u}\,\underline{v} = -\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}$

Tétel: 3 vektor $\Leftrightarrow$ egysíkú, ha vegyesszorzatuk 0.

BIZ.: Ha a 3 vektor között van zérusvektor v. a 3 vektor egysíkú, akkor igaz a tétel állítása.

Feltételezzük, h. az adott vektorok között nincs zérusvektor és nincs két $\parallel$ vektor. $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$

a) $\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = 0. \Rightarrow (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$, ha $(\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow$ a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ párhuzamos $\Rightarrow \underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$ egysíkú; ha $\underline{v} \times \underline{w} \neq \underline{0} \Rightarrow$ $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{v} \times \underline{w} \perp \underline{u} \Rightarrow \underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u}$ egysíkú vektorok.



b) A 3 vektor egysíkú $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}) \Rightarrow \underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = 0.$ az előbbiek szerint.

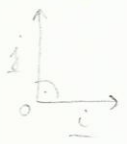
4. előadás

X. 4.

4. tétel

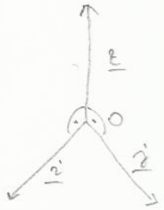
Vektor koordinátái. Műveletek koordinátás alakú vektorokkal.

Tekintsünk a síkon két egymásra ⊥ egységnyi hosszúságú vektort!
$\underline{i}$ a $\underline{j}$-ba az óramutató járásával forgatható el ellentétes irányba.
Kezdőpont: O.
Amint azt tudjuk $\underline{i}, \underline{j}$ az általuk meghatározott sík valós számok testének egy bázisát adják.
Ezért a sík $\forall$ $\underline{v}$ vektora egyértelműen írható fel
$v = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \underline{j}$, alakban, azaz egyetlen $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}$ számpár van, amelyre az egyenlőség teljesül.
Az a_1, a_2-t a $\underline{v}$ a síkbeli koordinátáinak nev.
$\underline{v}$ koordinátái függnek az O pont és $\underline{i}$ és $\underline{j}$ megválasztásától.



Tekintsük a térben egy O pontból kiinduló 3 páronként egymásra merőleges $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorokat.
Ezek a vektorok sorrendben alkossanak jobbrendszert.

Ekkor $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ a térbeli vektorok valós számok teste fölötti vektorterének egy bázisát képezik. Ezért a tér $\forall$ $\underline{v}$ egyértelműen írható fel $\underline{v} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$ alakban, azaz egyetlen olyan rendezett valós számhármas létezik, amelyre ez az egyenlőség teljesül. $(a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$. a_1, a_2, a_3 a $\underline{v}$ térbeli derékszögű koordinátáinak nevezzük és $\underline{v} = (a_1; a_2; a_3)$ -mal jelöljük. $(a_i \in \mathbb{R} \quad i = 1;2;3)$



T.: Két vektor $\Leftrightarrow$ egyenlő, ha megfelelő koordinátái rendre egyenlőek. Ezért egy vektoregyenlet annyi skaláregyenletet jelent, ahány koordinátája van az egyenletben szereplő vektoroknak.

Műveletek koordinátás alakban adott vektorokkal:

1) Összeadás, kivonás:

$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3)$, $\underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$

$$\underline{v} \pm \underline{w} = (a_1 \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} + a_3 \cdot \underline{k}) \pm (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$$

$$= (a_1 \pm b_1)\, \underline{i} + (a_2 \pm b_2)\, \underline{j} + (a_3 \pm b_3)\, \underline{k}$$

$$\underline{v} \pm \underline{w} = (a_1 \pm b_1 ; a_2 \pm b_2 ; a_3 \pm b_3)$$

Koordinátás alakú vektorokat úgy adunk össze ill. vonunk ki, h. a megfelelő koordinátákat rendre összeadjuk ill. kivonjuk.

2) Skalárral való szorzás:

$$\underline{v} = (a_1 ; a_2 ; a_3) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot \underline{v} = a \cdot (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) = (a a_1)\underline{i} + (a a_2)\underline{j} + (a a_3)\underline{k}$$

$$a \cdot \underline{v} = (a \cdot a_1 ; a \cdot a_2 ; a \cdot a_3)$$

Koordinátás alakban adott vektort úgy szorzunk egy valós számmal, h. a vektor koordinátáit rendre megszorozzuk a valós számmal.

3) Skaláris szorzás:

$$\underline{v} := (a_1 ; a_2 ; a_3) \qquad \underline{w} := (b_1 ; b_2 ; b_3)$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = (a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} + a_3 \underline{k}) \cdot (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1) \cdot \underline{i}^2 + (a_2 b_1)(\underline{j}\,\underline{i}) + (a_3 b_1)(\underline{k}\,\underline{i}) + (a_1 b_2)(\underline{i}\,\underline{j}) + (a_2 b_2)\underline{j}^2 + (a_3 b_2)\underline{k}\,\underline{j} +$$

$$+ (a_1 b_3)(\underline{i}\,\underline{k}) + (a_2 b_3)(\underline{j}\,\underline{k}) + (a_3 b_3)\underline{k}^2 =$$

$$= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Két koordinátás alakú vektort úgy szorzunk skalárisan, hogy a megfelelő koordinátákat összeszorozzuk, és ezeket összeadjuk.

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$$

Így ki tudjuk számolni egy koordinátás vektor abszolútértékét.

$$\underline{v} := (a_1 ; a_2 ; a_3)$$

$$|\underline{v}|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Koordinátás alakú vektor abszolútértékét úgy számítjuk ki, hogy a koordináták négyzetösszegéből négyzetgyököt vonunk.

Meghatározhatjuk két koordinátás vektor ∢-ét is.

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}, \underline{w}) \Rightarrow (\underline{v}, \underline{w}) = \arccos \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$$

$$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3) \qquad \underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$$

$$(\underline{v}, \underline{w}) = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$\Downarrow$

$\underline{v}$ és $\underline{w}$ ∢-e.

4) Vektoriális szorzás:

$$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3) \quad ; \quad \underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$$

$$\underline{v} \times \underline{w} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \times (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1)\overbrace{(\underline{i} \times \underline{i})}^{1 \cdot 1 \cdot 0^\circ = 0} + (a_2 \cdot b_1)(\underline{j} \times \underline{i}) + (a_3 \cdot b_1)(\underline{k} \times \underline{i}) + (a_1 \cdot b_2)(\underline{i} \times \underline{j}) +$$

$$+ (a_2 \cdot b_2)(\underline{j} \times \underline{j}) + (a_3 \cdot b_2)(\underline{k} \times \underline{j}) + (a_1 \cdot b_3)(\underline{i} \times \underline{k}) + (a_2 \cdot b_3)(\underline{j} \times \underline{k}) + (a_3 \cdot b_3)(\underline{k} \times \underline{k}) =$$

$$= -(a_2 \cdot b_1)\underline{k} + (a_3 \cdot b_1)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2)\underline{k} + (a_3 \cdot b_2)\underline{i} - (a_1 \cdot b_3)\underline{j} + (a_2 \cdot b_3)\underline{i} =$$

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ $\underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$ $\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 b_3)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\underline{k}$$

$$\underline{v} \times \underline{w} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \, ; \, a_3 b_1 - a_1 b_3 \, ; \, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Két koordinátás vektor vektoriális szorzata egyenlő annak a harmadrendű determinánsnak az értékével, amelynek első sorában az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorok, második sorában a vektoriális szorzás első tényezőjének koordinátái, a harmadik sorában a második tényezőjének koordinátái állnak.

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(Ha a harmadrendű determinánst kifejtenénk és rendeznénk, akkor az előzőekben kiszámított képletet kapnánk.)

5) Vegyes szorzás:

$$\underline{v} = (a_1; a_2; a_3) \quad ; \quad \underline{w} = (b_1; b_2; b_3) \qquad \underline{u} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} = \left[(a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k}\right] \cdot (c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j} + c_3 \underline{k})$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$$

Számolással megmutatható, h. három koordinátás alakban adott vektor vegyes szorzata egyenlő annak a harmadrendű determinánsnak az értékével, amelynek első sorában a vegyes szorzat első tényezőjének, második sorában a második tényezőjének és harmadik sorában a harmadik tényezőinek koordinátái állnak.

$$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Példa:

$$\underline{v} = (2; -1; 0) \quad ; \quad \underline{w} = (3; -2; 1) \quad ; \quad \underline{u} = (1; -2; 1)$$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = ?$

$\underline{v} \times \underline{w} = ?$

$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = ?$

Mo.: $\underline{v}\,\underline{w} = 6 + 2 + 0 = \underline{8}$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\underline{i} - 4\underline{k} + 3\underline{k} - 2\underline{j} = -\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$$
$$\begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\underline{v} \times \underline{w} = (-1; -2; -1)$$

$$\underline{v}\,\underline{w}\,\underline{u} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 4 + 3 = 2$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}$$

5. tétel

AZ EGYENES EGYENLETEI

Vektorok koordinátái mellett beszélünk pontok koordinátáiról is.

Ha megadunk a térben egy merőleges O pontot, a tér bármely P pontja jellemezhető $\underline{r}$ helyvektorral.

$$\vec{OP} = \underline{r}$$

Ilyenkor azt is mondjuk, h. P pont $\underline{r}$ helyvektora.
jel.: $P(\underline{r})$

Helyezzük a térbeli koordinátarendszert az O pontba.

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ alakban egyértelműen írható, ahol $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a tengelyek irányába mutató egységvektorok, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\underline{r} = (x; y; z)$

A x, y, z koordinátákat a P pont koordinátáinak is mondjuk és $P(x; y; z)$ -vel jelöljük.

Geometriai alakzatok egyenletei:

Beszélünk egy geometriai alakzat skalár és vektoregyenletéről.

Egy geometriai alakzat skalár egyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái elégítenek ki, más pontok nem.

Vektoregyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet pontosan a geometriai alakzat pontjainak helyvektorai elégítenek ki.

Def.: Egy egyenesre v. egy síkra $\perp$ nem zérus vektort az egyenes ill. a sík normálvektorának nevezzük és általában $\underline{n}$-nel jelöljük.

Az egyenes egyenletei:

a) A síkban:

Legyen adott $P(\underline{r}_0)$ és $\underline{n}(\neq \underline{0})$. $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\underline{n} = (A, B)$

Tétel: A $P(\underline{r}_0)$ ponton áthaladó $\underline{n}$ normálvektorú síkbeli egyenes egyenlete:

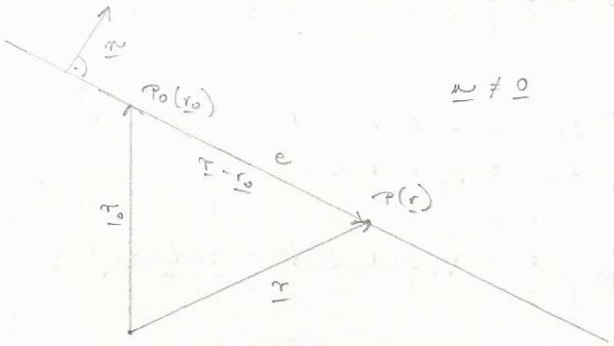
$$\underline{n}\,(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0.$$

Ezt az egyenletet a síkbeli egyenes normálvektoros egyenletének nevezzük.

$\underline{r}$: az egyenes tetszőleges pontjának (futópont) helyvektora

Biz.:

a)



Legyen $P(r)$ az egyenes egy tetszőleges pontja. $\Rightarrow$

$(\underline{r} - \underline{r}_0) \parallel e \;\Rightarrow\; (\underline{r} - \underline{r}_0) \perp \underline{n} \;\Rightarrow\; \underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ (skaláris szorzat 0)

b) $P(\underline{r})$ helyvektora kielégíti $\underline{n}\,(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ egyenletet $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\underline{r} - \underline{r}_0) \perp \underline{n} \;\Rightarrow\; (\underline{r} - \underline{r}_0) \parallel e \;\Rightarrow\; \underline{r}_0 + (\underline{r} - \underline{r}_0) = \underline{r} \;\Rightarrow\; P(\underline{r}) \notin e$

ellentmondás az e egyenesre.

5. előadás

Tétel: Minden síkbeli egyenes egyenlete $Ax+By+C=0$ alakban írható, ahol $C, A, B \in \mathbb{R}$, A és B nem egyidejűleg 0. Minden ilyen egyenlet síkbeli egyenes egyenlete. Ezt a síkbeli egyenes általános egyenletének nevezzük.

BIZ.:

a) Láttuk, h. minden síkbeli egyenes $\underline{n}(\underline{r}-\underline{r}_0)=0$ alakban írható és $\underline{n}=(A,B)$. Nem zérusvektor, így A és B nem egyidejűleg 0.

$\underline{r}_0=(x_0, y_0)$ $\qquad$ $\underline{r}=(x;y)$

$$\underline{n}(\underline{r}-\underline{r}_0)=(A,B)(x-x_0, y-y_0)=Ax+By+\underbrace{(-Ax_0-By_0)}_{C}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{Ax+By+C=0}}$$

b) Meg kell mutatni, hogy minden $Ax+By+C=0$ egyenlet síkbeli egyenes egyenlete.

$\underline{n}$, $\underline{r}_0$ adunk meg az együtthatók segítségével:

$\underline{n}(\underline{r}-\underline{r}_0)=0 \rightarrow$ ez pedig síkbeli egyenes egyenlete.

$$\underline{n}=(A,B), \quad \underline{r}_0=\frac{-C}{\underline{n}^2}\cdot\underline{n}$$

$$\underline{r}=(x;y)$$

$$\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)=\underline{n}\,\underline{r}-\underline{n}\cdot\frac{-C}{\underline{n}^2}\cdot\underline{n}=\underline{n}\cdot\underline{r}+C=Ax+By+C=0$$

Minden $Ax+By+C=0$ alakú egyenlet síkbeli egyenes egyenlete.