Jakus G.–Kis M.– Magyar T.–Zombori N.

ANALÍZIS PÉLDATÁR

BUDAPEST, 2012.

2. javított kiadás

Tartalomjegyzék

1. Sorozatok

1.1. Monotonitás, korlátosság, konvergencia

Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

1. $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$
2. $a_n = \dfrac{6n-7}{3n-2}$
3. $a_n = \dfrac{n+2}{2+3n}$
4. $a_n = \dfrac{2n-1}{5n+2}$
5. $a_n = \dfrac{n+4}{9-2n}$
6. $a_n = \dfrac{3n+4}{4n-2}$
7. $a_n = \dfrac{3-5n}{2n-1}$
8. $a_n = \dfrac{n+2}{1-3n}$
9. $a_n = \dfrac{n+1}{2n-7}$
10. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n+1)}$
11. $a_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$
12. $a_n = \dfrac{n+5}{2n-1}$
13. $a_n = \dfrac{1-2n}{2n+2}$
14. $a_n = \dfrac{4n+6}{4n-1}$
15. $a_n = \dfrac{3n^2-2}{n^2}$

1.2. Határérték-számítás

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

16. $a_n = \dfrac{(n-3)^2 - n(n+1)}{3(2n^2-5)}$
17. $a_n = \dfrac{5n^3+4n^2-2}{5n-3n^2+4}$
18. $a_n = \dfrac{7n^2+4n-2}{4-5n-2n^2}$
19. $a_n = \dfrac{4n^3-2}{3n^2-5n}$
20. $a_n = \dfrac{7(n^2+1)-3n(n+2)}{3n^2+5}$
21. $a_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n(3-n)}$
22. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^8+7n}+10n^2}{2n-\sqrt{25n^4+3n}}$
23. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n^6+7n}-8n^2}{4n^2+\sqrt{49n^4+7n}}$
24. $a_n = \dfrac{5n+\sqrt[3]{64n^3+2n}}{\sqrt{n}+7n}$
25. $a_n = \dfrac{\sqrt{7n^3-2n^2+1}+\sqrt[4]{n^8+3n-5}}{\sqrt{16n^4-n}}$
26. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2}-\sqrt[4]{n^5+3n}}{\sqrt{16n^4-3n^3}}$
27. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4-n+2}-2n}{\sqrt{5n^4+2n}+\sqrt{3n}}$
28. $a_n = \dfrac{\sqrt{6n^3-2n^2+3}-\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{2n^2+7}-5n}$

29. $a_n = \dfrac{5n^2 - \sqrt{3n^6 + 5}}{\sqrt[3]{2n^3 - 1} - 2n}$

30. $a_n = \dfrac{\sqrt{25n^2 - 3n} - \sqrt[3]{8n^3 + 2n - 1}}{\sqrt[4]{(n+2)^3}}$

31. $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}$

32. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{5n-4}$

33. $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + n}$

34. $a_n = \sqrt{4n^2 + 2n + 3} - \sqrt{4n^2 + 3n}$

35. $a_n = \dfrac{3^n + 2^n}{3^{n+2} - 3^n}$

36. $a_n = \dfrac{3^n - 5^{n-1}}{2^{n+3} - 3^{2n}}$

37. $a_n = \dfrac{4 - 5^{-n}}{3^{n+1}}$

38. $a_n = \dfrac{4 \cdot 3^{n-2} - 2^{-n}}{3^{n+1} + 2^n}$

39. $a_n = \dfrac{4^{n-2} - 7^{n+2}}{7^n + 2^{2n}}$

40. $a_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n+1} - 2^n}{3 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2}}$

41. $a_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{5^{-n} - 3 \cdot 2^n}$

42. $a_n = \dfrac{3^{2n} - 5 \cdot 2^{n+1}}{4^{n-1} - 5^{n+2}}$

43. $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$

44. $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^n$

45. $a_n = \left(\dfrac{2n-3}{2n-5}\right)^n$

46. $a_n = \left(\dfrac{n-4}{n+2}\right)^{n+3}$

47. $a_n = \left(\dfrac{2n-6}{2n+2}\right)^{n-1}$

48. $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{2n}$

49. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n+2}$

50. $a_n = \left(\dfrac{3n-2}{3n+4}\right)^{4n-3}$

51. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-4}\right)^n$

52. $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{2n}$

53. $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{n+1}\right)^n$

54. $a_n = \left(\dfrac{6n-2}{6n+3}\right)^{6n+10}$

55. $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{n-4}\right)^{3n-2}$

56. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n-5}\right)^{6n}$

57. $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{2n-1}\right)^{n+3}$

58. $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n-2}$

59. $a_n = \left(\dfrac{3n-6}{3n+1}\right)^{3n}$

60. $a_n = \left(\dfrac{4n-2}{4n+5}\right)^{n+3}$

61. $a_n = \left(\dfrac{5n+2}{5n-8}\right)^{3n-1}$

62. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^8+7n}+10n^2}{2n-\sqrt{25n^4+3n}}$

63. $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^3}+2n^3+\sqrt[4]{n^8+3n}}{\sqrt{49n^6+2n}}$

64. $a_n = \dfrac{2n^3+\sqrt[4]{n^8}}{\sqrt{49n^6+2n}}$

65. $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^3+4n}+\sqrt[4]{n^8+3n}}{\sqrt{9n^4+2n}}$

66. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^8+3n}+3n^2}{4n-\sqrt{16n^4+2n}}$

67. $a_n = \dfrac{-9n-\sqrt[4]{n^8+4n^4+2}}{\sqrt{n^4}+4n}$

68. $a_n = \dfrac{7(n^2+1)-3n(n+2)}{3n^2+5}$

69. $a_n = \dfrac{3^{-n}-5^{n+1}}{2\cdot 5^{n-1}+3^{n+2}}$

70. $a_n = \dfrac{5^{n+3}-7^{n+1}}{\left(\frac{1}{7}\right)^{-n}+5^{n-1}}$

71. $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{7}\right)^{-n}+2^{3n}}{8^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}}$

72. $a_n = \dfrac{5\cdot 7^{n+1}-4^n}{3\cdot 4^{n+1}+7^{n+2}}$

73. $a_n = \dfrac{3\cdot 4^n-9^{n-1}}{9^{n+2}}$

1.3. Küszöbszám-keresés

Határozza meg a következő sorozatok határértékét, és keresse meg az adott ε-hoz tartozó küszöbszámot!

74. $a_n = \dfrac{1-2n}{4n-3}$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

75. $a_n = \dfrac{4n+3}{5n-1}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{10}$

76. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $\quad \varepsilon = 10^{-4}$

77. $a_n = \dfrac{5n^2-2}{3n^2+1}$ $\quad \varepsilon = 10^{-6}$

78. $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{20}$

79. $a_n = \dfrac{n+2}{n^2+3}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

80. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{100}$

81. $a_n = \dfrac{3n}{2n-5}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

82. $a_n = \dfrac{n+1}{11-2n}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{1000}$

83. $a_n = \dfrac{4n}{7n-5}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

84. $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ $\varepsilon = 10^{-2}$

85. $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$ $\varepsilon = 10^{-2}$

86. $a_n = \dfrac{3n-7}{1+n}$ $\varepsilon = 10^{-3}$

87. $a_n = \dfrac{4n+2}{5+3n}$ $\varepsilon = 10^{-3}$

88. $a_n = \dfrac{5n-9}{-4-2n}$ $\varepsilon = 10^{-2}$

2. Pénzügyi számítások

1. Egy iroda bérlésére három konstrukció közül választhatunk:
   a. Most 5 millió Ft-ot, majd minden év elején 4 éven keresztül 250.000 Ft-ot fizetünk.
   b. Most 3 millió Ft-ot, majd 2 év eltelte után újabb 3 millió Ft-ot fizetünk.
   c. Most, azonnal készpénzben kifizetünk 5,5 millió Ft-ot.
   Melyik konstrukciót érdemes választanunk? (A bank 15%-os kamattal számol.)

2. Egy ipari hűtőgép eladására két árajánlatot kapunk.
   a. A vevő most fizet 500 eFt-ot, majd négy éven keresztül minden évben 100 eFt-ot.
   b. A vevő most fizet 700 eFt-ot, majd öt év múlva 200 eFt-ot.
   Melyik lehetőség kedvezőbb, ha az elkövetkező 5 évben végig 12%-os éves kamatlábbal számolunk?

3. Egy lakás eladásakor két ajánlatot kapunk:
   Első: A vevő most fizet 3 millió Ft-ot, majd egy-egy év elteltével még kétszer 4 millió Ft-ot.
   Második: A vevő most fizet 7 millió Ft-ot, majd két év múlva még 3 millió Ft-ot.
   a. Melyik ajánlat kedvezőbb, ha az elkövetkező 2 évben állandó 10%-os kamatlábbal számolunk?
   b. Hány %-os éves kamatláb esetén azonos a két ajánlat?

4. Egy gépet szeretnénk megvásárolni, amire három ajánlatot kapunk.
   a. 150.000 Ft most, 20.000 egy év múlva és 20.000 három év múlva,
   b. 100.000 Ft most, 60.000 két év múlva és 40.000 négy év múlva,
   c. 200.000 Ft két év múlva.
   Melyik ajánlat a kedvezőbb, ha a banki kamatláb 13%?

5. Családunk rövid távú megtakarításként 7 éven keresztül **minden év elején** 800eFt-ot helyez el egy bankban. Az 7. év eltelte után kiveszünk 2mFt-ot, majd újabb 7 évig nem nyúlunk a pénzhez. A tizennegyedik év eltelte után mekkora összeg áll a rendelkezésünkre, ha a bank évi 12% kamatot biztosít számunkra?

6. **a.** 8 éven keresztül minden év elején 400eFt-ot helyezünk el a bankba. A rákövetkező 5 évben megfeledkezünk a betétszámlánkról, nem veszünk ki, és nem teszünk be semmilyen összeget. A 13. év elteltével mennyi pénzünk lesz, ha a kamatláb végig 5,5%?
   b. Hány év alatt gyűlne össze 12 millió Ft, ha az első évtől kezdve 300eFt-t tennénk be évenként folyamatosan?

7. **a.** Egy alapítvány 25 millió forintot helyez el bankban 5 évre. Az éves kamatláb ebben az esetben 12,5% lesz. Mekkora összeget tudnak felvenni 5 év elteltével?
   b. Mennyivel változna a végösszeg, ha minden év elején 5 millió Ft-ot tennének be, és az éves kamatlába 8% lenne?

8. Minden év elején 980 eFt-ot helyezünk el a bankban éves 11%-os kamatra.
   a. Mennyi pénzünk gyűlik össze a 7. év végére?
   b. Hány év alatt gyűlik össze 15 millió Ft?

9. **a.** 15 éven keresztül minden év elején 500 000 Ft-ot helyezünk el a bankban.
   Mennyi pénzünk lesz az ötödik év végén, ha a kamatláb végig 11%?
   b. Hány év alatt gyűlne össze 8 millió forint?
   (A kamatfeltételek közben nem változnak.)

10. Előtakarékosság céljából 12 éven át minden évben befizetünk a bankba 850 eFt-ot. A banki kamat 9,5 %.
    a. Mennyi pénzt gyűjtöttünk?
    b. A 13. évtől kezdve feléljük az összegyűjtött pénzünket, és minden évben 3 millió Ft-ot veszünk ki. Hány évre elegendő a megtakarított pénzünk, ha közben a kamatok nem változnak?

11. Tíz éven keresztül évi 11 %-os kamatlábbal és 400eFt annuitással gyűjtésbe kezdünk. A gyűjtés befejezésétől számított 1 év múlva a tőkét 8 év alatt évjáradék formájában évi 10%-os kamat mellett feléljük. Mekkora a felélés évjáradéka?

12. Egy vállalkozó egy bankból 50mFt kölcsönt vesz fel évi 18%-os kamatra.
    a. Egy év elteltével, 15 éven át egyenlő összegeket kíván törleszteni úgy, hogy a végén ne maradjon adóssága. Mennyi az éves törlesztőrészlet összege, ha ez idő alatt a kamatláb nem változik?
    b. Ha minden évben 12mFt-ot törlesztene, hány év alatt fizetné vissza a kölcsönt?

13. Egy bankból 6,5 mFt kölcsönt veszünk fel évi 9,5 %-os kamatra.
    a. Egy év elteltével, 16 éven át egyenlő összegeket kívánunk törleszteni úgy, hogy a 16. év végére ne maradjon adósságunk. Mennyi az annuitás összege, ha ez idő alatt a kamatláb nem változik?
    b. Ha minden évben 990 eFt-ot törlesztenénk, hány év alatt fizetnénk vissza a kölcsönt?

14. Egy bankból 12 millió Ft kölcsönt veszünk fel évi 9%-os kamatra.

a. Egy év elmúltával, 25 éven át egyenlő összegeket kívánunk törleszteni úgy, hogy a 25-ik év végén ne maradjon adósságunk. Mennyi az annuitás összege, ha ez idő alatt a kamatláb nem változik?

b. Ha minden évben 1,5 millió Ft-t törlesztenénk, hány év alatt fizetnénk vissza a kölcsönt?

15. Egy kereskedő áru beszerzésére kölcsönt akar felvenni. A bank 1,5 millió forint kölcsönt ad, évi 20%-os kamatláb mellett. A törlesztést a kölcsön felvétele után egy évvel kell elkezdeni.

a. A kereskedő minden évben 400 000 Ft-ot tud visszafizetni. Hány év alatt fizeti vissza a kölcsönt?

b. 22%-os kamatláb mellett mennyit kellene évente visszafizetnie, ha 5 év alatt szeretné törleszteni a kölcsönt?

3. Függvények határértéke

3.1. Függvényhatárérték a végtelenben

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x-2x^3}{5x^2+3x}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x+5x^2}{7-2x}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x(x+5)}{(x-3)^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(x+2)^2}{x^3-2x^2-1}$

3.2. Függvényhatárérték véges helyen

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2-6}{x^2-4x+3}$

3.3. Függvényhatárérték véges helyen (0/0)

6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2+x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+x-6}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2}{x^3-2x}$

3.4. Függvényhatárérték véges helyen (c/0)

10. $$\lim_{x\to -4}\frac{x-2}{x^2-16}$$

11. $$\lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{x^2+2x+1}$$

12. $$\lim_{x\to 1}\frac{1-2x}{2x^2-3x+1}$$

13. $$\lim_{x\to -5}\frac{2x}{x^2+10x+25}$$

3.5. Vegyes feladatok

14. $$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2+2x-40}{x^2-3x-4}$$

15. $$\lim_{7}\frac{4x+3}{x^2-10x+21}$$

16. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+10}{x^2+9x-22}$$

17. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x-4}{x^2-8x+2}$$

18. $$\lim_{-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$$

19. $$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3+2x^2-7}{x^2-4x+6}$$

20. $$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+5x^2-10x}{1+6x^2}$$

21. $$\lim_{-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2\right)$$

Vizsgálja meg az alábbi függvények határértékét a végtelenekben ($\infty;-\infty$) és a szakadási pontokban!

22. $$f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2+2x}$$

23. $$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}$$

24. $$f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

25. $$f(x)=\frac{2x^2-10x+8}{x^2+x-2}$$

26. $$f(x)=\frac{2x^2-11x-6}{x^2-10x+24}$$

27. $$f(x)=\frac{x^2-5x-14}{x^2-15x+56}$$

28. $$f(x)=\frac{2x+7}{x^2-5x}$$

4. Differenciálszámítás

Alapszabályok

[1.]	$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(x \in \mathrm{R}^{+})$
[2.]	$(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a$	$(a \in \mathrm{R}^{+})$
[3.]	$(e^{x})' = e^{x}$	
[4.]	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(x \in \mathrm{R}^{+}; a \in \mathrm{R}^{+} \setminus \{1\})$
[5.]	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(x \in \mathrm{R}^{+})$
[6.]	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	
[7.]	$(f + g)' = f' + g'$	
[8.]	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	
[9.]	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	
[10.]	$\left(f(g)\right)' = f'(g) \cdot g'$	

Deriválja a következő függvényeket!

1. $f(x) = \dfrac{5}{x^4}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 5x}{x^3}$
4. $f(x) = 3^x \cdot x^3$
5. $f(x) = (4x^2 + 2x - 10) \cdot \ln x$
6. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x+5}$
7. $f(x) = \dfrac{3x + 12}{2x^2 - x}$
8. $f(x) = \dfrac{5x^3 + \ln x}{2^x + x^2}$
9. $f(x) = (9x + 12x^2)^{10}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 7x + 2}$
11. $f(x) = 2\ln(3x - 2)$
12. $f(x) = 7e^{-x^2+3x-2}$
13. $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$
14. $f(x) = 8\ln^2 x$
15. $f(x) = (3x^2 - 4x)\ln 2x$
16. $f(x) = 4e^{6x-1} \cdot 5^x$
17. $f(x) = \dfrac{\ln 2x}{5x^2}$
18. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x}{\ln(9x^2)}$
19. $f(x) = 6 \cdot \sqrt{\ln(3x - 8x^2)}$

20. $f(x)=\sqrt{5\cdot e^{6x^2+3x}}$

21. $f(x)=x^4\sqrt{x}$

22. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

23. $f(x)=\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}$

24. $f(x)=4x^7+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

25. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x^3}{\sqrt{x}}$

26. $f(x)=\dfrac{5\sqrt{x}-6\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2}$

27. $f(x)=\ln x\cdot(6x-5)$

28. $f(x)=\left(3x^4-2x^3+x\right)\cdot 2^x$

29. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4x+2}$

30. $f(x)=\dfrac{4x^3-2x}{3x^2+5x^3}$

31. $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{x^2}$

32. $f(x)=\dfrac{7x^2+4}{e^x}$

33. $f(x)=\dfrac{5^x}{\ln x}$

34. $f(x)=(3x-8)^7$

35. $f(x)=\sqrt{6x^4-2x^5}$

36. $f(x)=e^{-3x^2+5x}$

37. $f(x)=5\ln\left(2x^3-4x+3\right)$

38. $f(x)=2^{5x-9}$

39. $f(x)=\dfrac{5x^2-\sqrt{x}+2x^3}{x^3}$

40. $f(x)=\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}$

41. $f(x)=\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}$

42. $f(x)=3\sqrt{x}\cdot\ln x$

43. $f(x)=2e^x\cdot x^8$

44. $f(x)=\left(5x^2+3x+2\right)\cdot 6^x$

45. $f(x)=(5x+6)\left(\sqrt{x}+2^x\right)$

46. $f(x)=\dfrac{2x}{2^x}$

47. $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x+5}$

48. $f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x^3-2}$

49. $f(x)=\dfrac{8^x+1}{\sqrt{x}+2x}$

50. $f(x)=10(6x-5)^8$

51. $f(x)=\sqrt{3x^2+8x-1}$

52. $f(x)=\ln(6x-1)$

53. $f(x)=\sqrt{\ln x+6}$

54. $f(x)=5\cdot e^{-3x}$

55. $f(x)=2\cdot e^{2x^2-3x+5}$

56. $f(x)=2^{-3x^2+6x}$

57. $f(x)=3\cdot 7^{5-8x^3}$

58. $f(x)=\ln^3 x+6$

59. $f(x)=5x^4\cdot 5^{4x}$

60. $f(x)=\dfrac{\ln 5x}{x^5}$

5. Függvényelemzés

5.1. Monotonitás és szélsőérték vizsgálat

1. Vizsgálja meg az $f(x)=2x^3+3x^2-12x+3$ függvény monotonitását, és adja meg a függvény helyi szélsőérték pontjait!

2. Vizsgálja meg az $f(x)=x^3-3x^2-24x+5$ függvény monotonitását, és adja meg a függvény helyi szélsőérték pontjait!

3. Vizsgálja meg az $f(x)=6x^2-x^4$ függvény monotonitását, és adja meg a függvény helyi szélsőérték pontjait!

4. Adott az $f(x)=-3x^4-4x^3$ függvény. Határozza meg a függvény monotonitási intervallumait és helyi szélsőérték pontjait!

5. Adott az $f(x)=e^{2x}\cdot(3x-4)$ függvény. Mely intervallumokon növekvő, illetve csökkenő a függvény? Hol, milyen és mekkora helyi szélsőértékei vannak a függvénynek?

6. Adott az $f(x)=\left(1+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$ függvény. Mely intervallumokon növekvő, illetve csökkenő a függvény? Hol, milyen és mekkora helyi szélsőértékei vannak a függvénynek?

7. Adott az $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x}$ $\quad D_f=R\setminus\{0\}$ függvény. Mely intervallumokon növekvő, illetve csökkenő a függvény? Hol, milyen és mekkora helyi szélsőértékei vannak a függvénynek?

8. Egy cég nyereségének a függvénye
$$P(d)=-2d^3+216d^2-4320d-20000$$
(dollárban), ahol d a legyártott és értékesített termékek számát jelenti. Adja meg, hogy milyen d értékekre növekszik, illetve csökken a nyereség, ha növeljük a d értékét, majd adja meg a nyereség maximumát! (Vizsgálja a nyereség függvény monotonitását, és adja meg a függvény maximumát!)

9. Egy vállalat éves nyereségét a

$$P(d) = -6d^3 + 1035d^2 - 50400d + 1000000$$

függvény adja meg, ahol ***d*** a legyártott és értékesített termékek darabszámát jelenti. Milyen intervallumban növekszik, illetve csökken a nyereség? Adjuk meg a nyereség szélsőérték pontjait, ha tudjuk, hogy egy szerződés miatt legalább 30 db-ot gyártani kell, és a vállalat maximum 105 db termék előállítására képes!

10. Egy új illatszer esetén a szakemberek a $Q(p) = \frac{10p}{16 + p^2}$ keresleti függvényt valószínűsítik, ahol *p* az eladási egységárat jelenti euróban, $Q(p)$ pedig a keresletet ezer flakonban. Adja meg a keresleti függvény monotonitását! Hány euró egységár mellett lesz maximális a kereslet, és mekkora a maximális kereslet?

11. Egy műhelyben havonta *p* db azonos gépet állítanak elő, amelyeket azután mind értékesíteni is tudnak. Az összköltséget $K(p) = 1{,}5p^2 + 40p + 2000$, az összbevételt a $B(p) = -p^2 + 340p + 3500$ függvények adják meg. Határozza meg a havonta előállítandó gépek számát úgy, hogy a műhely nyeresége**,** $N(p)$ maximális legyen! $\left(N(p) = B(p) - K(p)\right)$

12. Egy adott termék termelési költségét a $K(x) = 500 + 4x$ függvény, eladásából származó bevételt a $B(x) = 100x - \frac{1}{4}x^2$ függvény írja le, ahol *x* az előállított termék mennyiségét jelenti. Kapacitási korlátok miatt *x* értéke nem lépheti túl a 200-ot.
Mekkora termelési mennyiség esetén lesz a nyereség maximális és mekkora a maximális nyereség?
(A nyereség függvény: $N(x) = B(x) - K(x)$)

13. Egy adott termék termelési költségét a $K(x) = 200 + 50x + \frac{1}{10}x^2$ függvény, eladásából származó bevételt a $B(x) = 100x - \frac{1}{10}x^2$ függvény írja le, ahol x az előállított termék mennyiségét jelenti. Kapacitási korlátok miatt x értéke nem lépheti túl a 140-et.
Mekkora termelési mennyiség esetén lesz a nyereség maximális és mekkora a maximális nyereség?
(A nyereség függvény: $N(x) = B(x) - K(x)$)

14. Egy bútorgyár havonta *d* darab szekrényt gyárt. Az **összköltséget** a $K(d) = 784 + 72d + 0{,}16d^2$ függvény adja meg (ezer Ft-ban). Mekkora termelési szint esetén lesz a termékenkénti **átlagköltség** (A(d)) minimális, és ez hány forintot jelent?
$\left(A(d) = \frac{K(d)}{d}\right)$

15. Egy gumiabroncs gyártó termelésének **összköltségét** (dollárban) a $K(d) = 30d + 200 + 0{,}5d^2$ függvény adja meg, ahol *d* a napi termelést jelenti. Hány darab esetén lesz az abroncsonkénti *A(d)* **átlagköltség** minimális, és ez hány dollárt jelent? $\left(A(d) = \dfrac{K(d)}{d} \right)$

16. Egy mosógépeket gyártó cég termelésének összköltségét (dollárban) a $K(d) = d^2 + 750d + 2500$ függvény adja meg, ahol *d* a napi termelést jelenti. Hány darab esetén lesz a mosógépenkénti átlagköltség, $A(d)$ minimális, és ez hány dollárt jelent? $\left(A(d) = \dfrac{K(d)}{d} \right)$

17. Valamely árucikk iránti keresletet az $f(x) = 5 \cdot e^{4-0{,}008x}$ függvény fejezi ki, ahol *x* az egységárat, $f(x)$ a hozzá tartozó keresletet jelenti (darabban).
Milyen egységár mellett lesz maximális az árbevétel $(B(x))$, és mekkora a maximális bevétel? $(B(x) = f(x) \cdot x)$

18. Valamely árucikk iránti keresletet az $f(x) = 3 \cdot e^{4-0{,}01x}$ függvény fejezi ki, ahol *x* az egységárat, $f(x)$ a hozzá tartozó keresletet jelenti (darabban).
Milyen egységár mellett lesz maximális az árbevétel, és mennyi ennek az értéke? $(B(x) = f(x) \cdot x)$

19. Valamely árucikk iránti keresletet az $f(x) = 6 \cdot e^{4-0{,}04x}$ függvény fejezi ki, ahol *x* az egységárat, $f(x)$ a hozzá tartozó keresletet jelenti (darabban).
Milyen egységár mellett lesz maximális az árbevétel, és mennyi ennek az értéke? $(B(x) = f(x) \cdot x)$

5.2. Konvexitás és inflexiós pont vizsgálat

Vizsgálja meg az alábbi függvények konvexitását (konvex és konkáv tartományok), és adja meg a függvények inflexiós pontjait!

20. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 60x + 4$

21. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 27x^2 + 13x - 40$

22. $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2$

23. $f(x) = 3x^5 + 15x^4 + 12$

5.3. Elaszticitás

Adja meg a következő függvények adott ponthoz tartozó elaszticitás értékét, és értelmezze a kapott eredményt!

24. $f(x)=3\cdot 2^{4-0,03x}$ $\quad x_0=20$

25. $f(p)=5\cdot e^{6-0,02p}$ $\quad p_0=120$

26. $f(p)=2\cdot e^{6-0,01p}$ $\quad p_0=70$

27. $f(x)=3\cdot e^{6-0,01x}$ $\quad x_0=60$

28. $f(x)=7\cdot e^{6-0,08x}$ $\quad x_0=40$

29. $f(x)=3\cdot e^{-\frac{11}{100}x+6}$ $\quad x_0=4$

30. $f(x)=\frac{1}{5}\cdot\ln\left(3x^2+7x\right)$ $\quad x_0=3$

31. $f(x)=3\cdot\ln\left(6x^2+7\right)$ $\quad x_0=2$

32. $f(x)=3\cdot\ln\left(5x^2+4\right)$ $\quad x_0=3$

33. $f(x)=8\cdot\ln\left(3x^2-5\right)$ $\quad x_0=4$

34. $f(x)=5\cdot\ln\left(2x^2+3\right)$ $\quad x_0=4$

35. $f(x)=3\cdot\ln\left(3x^4+4\right)$ $\quad x_0=1$

36. $f(x)=(169-4x)^2$ $\quad x_0=6$

37. $f(x)=\dfrac{4}{x^3+2}$ $\quad x_0=2$

38. $f(x)=\dfrac{5}{(2x+1)^2}$ $\quad x_0=5$

39. $D(p)=\dfrac{4}{p^2+3}$ $\quad p_0=3$

40. $f(p)=\dfrac{4}{(1+2p)^2}$ $\quad p_0=5$

41. $f(x)=\sqrt{1000-4x}$ $\quad x_0=40$

42. $f(x)=\sqrt[3]{(5x-3)^5}$ $\quad x_0=1$

43. $f(x)=2x\cdot e^{3-0,02x}$ $\quad x_0=10$

44. $f(x)=7x\cdot e^{5-0,03x}$ $\quad x_0=50$

45. $f(x)=2^x\cdot x$ $\quad x_0=5$

46. $f(x)=x\cdot e^{-3x+6}$ $\quad x_0=4$

47. $f(x)=4x\cdot e^{-3x}$ $\quad x_0=3$

48. $f(x)=x\cdot e^{-4x-1}$, $x>0$ $\quad x_0=2$

49. $f(x)=x\cdot e^{-5x+2}$, $x>0$ $\quad x_0=2$

50. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$ $\quad x_0=5$

51. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ $\quad x_0=3$

52. $K(x)=\dfrac{2+x^3}{x^2}$ $\quad x_0=2$

6. Kétváltozós függvények

6.1. Parciális deriválás

Határozzuk meg a következő függvények **első-** és **másodrendű** parciális deriváltjait!

1. $f(x;y)=4x^2+2x^3y^4-2y+5$
2. $f(x;y)=\dfrac{x+2}{y^2}$
3. $f(x;y)=\dfrac{x^2+2y}{y^3}$
4. $f(x;y)=8x^2+6y-2x^3y^2$
5. $f(x;y)=5x^2y^7-3xy^3+10x-4y+2$

Határozzuk meg a következő függvények **elsőrendű** parciális deriváltjait!

6. $f(x;y)=\dfrac{y^2+5x^3y}{xy-5y}$
7. $f(x;y)=\dfrac{2xy^2+6x^4}{3x-5x^2y}$
8. $f(x;y)=2\sqrt{7x-3y+25x^2y}$
9. $f(x;y)=3\ln\left(12y^3-5xy+10\right)$
10. $f(x;y)=5e^{x^4y^2-2x^3+4y^2}$
11. $f(x;y)=2^{5x^3y^4-7y+x^5-1}$
12. $f_3(x,y)=\left(2y^5+8y\right)\cdot\ln\left(x^2+y^3\right)$
13. $f_3(x,y)=\left(2x+8y\right)\cdot\ln\left(x^2+y^3\right)$
14. $f_2(x,y)=y^4\cdot\left(4x^2-3\right)^3$
15. $f_2(x,y)=4y^2\left(x^5-3x\right)^5$
16. $f_3(x,y)=\dfrac{2x\cdot e^{-2+3y}}{y^4}$
17. $f_3(x,y)=\dfrac{4x^2}{y^7}$
18. $f_3(x,y)=\dfrac{4x^2+2y}{y^7}$
19. $f_2(x,y)=\dfrac{7y^2}{3x^4-2}$
20. $f_3(x,y)=\ln\left(x^2+y^3\right)\cdot 6y^2$
21. $f_2(x,y)=\ln x^2\cdot\sqrt{y^5-2y}$
22. $f_3(x,y)=\ln y\cdot e^{-2x+3y}$
23. $f_3(x,y)=\ln\left(4x^2y^3\right)$
24. $f_2(x,y)=\ln x^5\cdot\sqrt[3]{y^4-7y}$
25. $f_2(x,y)=\ln 3x^5\cdot\sqrt[7]{y^3-7y}$
26. $f_2(x,y)=7^{y^2+2}\cdot e^{5x^4+3x}$
27. $f_1(x,y)=e^{5x^3-4x}\cdot 2^{7y^3+10y^2}$

28. $f_2(x,y)=5^y\cdot e^{7x^4+16x}$

29. $f_1(x,y)=3^y\cdot\left(2x^5+5y\right)^6$

30. $f_1(x,y)=6^x\cdot\left(3x^2+8y^2\right)^7$

31. $f_1(x,y)=6^{5x^3-4x}\cdot\ln\left(7y^3+10y^2\right)$

Határozzuk meg a következő függvények **x szerinti elsőrendű** parciális deriváltját!

32. $f(x;y)=2y^4\cdot e^{3x^2y^3-5xy^4}$

33. $f_1(x,y)=3y\cdot e^{3x^3-7y^4+2}$

34. $f_1(x,y)=\left(2x^5+6y^2-6xy\right)^4$

35. $f_2(x,y)=\sqrt{x^3}\cdot 2^{8y^3-7y^5}$

36. $f_2(x,y)=x^3\cdot 2^{8y^3-7y^5}$

37. $f_1(x,y)=3^{7x^2-6}\cdot\ln\left(5y^4-8y\right)$

38. $f_1(x,y)=4^y\cdot\ln\left(2x^5+5x^4-1\right)$

Határozzuk meg a következő függvények **y szerinti elsőrendű** parciális deriváltját!

39. $f(x;y)=2x\cdot\ln\left(x^3y+5x-3y^8-1\right)$

40. $f_2(x,y)=4x^2\left(y^5-2y\right)^3$

41. $f_2(x,y)=3y^4\cdot\sqrt{2x^8-3x^3}$

42. $f_3(x,y)=\ln y\cdot e^{-2x+3y}$

43. $f_1(x,y)=\ln\left(2x^5+3y^7-5xy\right)$

44. $f_1(x,y)=\ln\left(4x^7+6y^3-5xy\right)$

45. $f(x,y)=e^{8x^3-4x}\cdot 5^{6y^3+10y^2}$

6.2. Kétváltozós függvények szélsőértéke

Határozzuk meg a következő kétváltozós függvény **lokális szélsőértékét**!

46. $f(x;y)=6y-4x-x^2-y^2+8$

47. $f(x;y)=3x^2+y^2+3xy+y+2$

48. $f(x,y)=4-(x-1)^2-(y+2)^2$

49. $f(x,y)=(1-x)^2+(2+y)^2-4$

50. $f(x,y)=(x+1)^2+(2y-4)^2-3$

51. $f(x,y)=4x^2+y^2-16x+6y+20$

52. $f(x,y)=2x^2-3xy+y^3$

53. $f(x,y)=(1-3x)^2+(2+2y)^2-4$

7. Integrálszámítás

7.1. Határozatlan integrál

7.1.1. Alapszabályok

[1.]	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$(n \neq -1)$
[2.]	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	
[3.]	$\int e^x dx = e^x + C$	
[4.]	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a \in \mathrm{R}^+)$
[5.]	$\int cf = c\int f$	$(c \in \mathrm{R})$
[6.]	$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$	

1. $\int \left(2x^7 + 3^x - 5 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx$

2. $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} dx$

3. $\int \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}\, dx$

4. $\int \sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\, dx$

5. $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3} dx$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^3 - 4}{\sqrt{x}} dx$

[7.]	$\int f^n \cdot f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$	$(n \neq -1)$

7. $\int (2x+1)^{10} dx$

8. $\int 2 \cdot \sqrt{3x+5}\, dx$

9. $\int 10 \cdot \sqrt[3]{(7-2x)^2}\, dx$

10. $\int \frac{3}{(4x-3)^5} dx$

11. $\int \frac{8}{\sqrt{6x-1}} dx$

12. $\int \frac{5}{\sqrt[4]{(2-7x)^3}} dx$

13. $\int (6x^2+4)(x^3+2x-4)^5 dx$

14. $\int 3x\sqrt{x^2-1}\, dx$

15. $\int \sqrt{(2x^4+4x)^3} \cdot (6x^3+3)\, dx$

16. $\int \frac{5x^2}{\sqrt[6]{4x^3+1}} dx$

17. $\int \frac{15x^2-10}{\sqrt[5]{(6x^3-12x)^2}} dx$

18. $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$

19. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

20. $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$

21. $\int \frac{2}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$

[8.] $\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + C$

22. $\int \frac{3}{1-4x} dx$

23. $\int \frac{5x}{x^2+3} dx$

24. $\int \frac{5x^2}{2x^3+8} dx$

25. $\int \frac{x+3}{x^2+6x+2} dx$

26. $\int \frac{5x^4-2x^2}{3x^5-2x^3} dx$

[9.] $\int e^f f' = e^f + C$

27. $\int 8 \cdot e^{3x+2} dx$

28. $\int 9x \cdot e^{x^2-4} dx$

29. $\int 7x^2 \cdot e^{10-5x^3} dx$

30. $\int (8x-6) \cdot e^{2x^2-3x+5} dx$

31. $\int (5x^2+10) \cdot e^{x^3+6x-2} dx$

[10.] $\int (f \cdot g') = f \cdot g - \int (f' \cdot g)$

32. $\int x \cdot e^x dx$

33. $\int x \cdot e^{2x} dx$

34. $\int 2x \cdot e^{3x} dx$

35. $\int \ln x dx$

36. $\int x \ln x dx$

7.1.2. Vegyes feladatok

37. $\int \frac{x^2+1}{4x}dx$

38. $\int \frac{4x}{x^2+1}dx$

39. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

40. $\int \frac{e^x}{5e^x+2}dx$

41. $\int e^x\left(e^x+2\right)dx$

42. $\int 7e^x\sqrt{2e^x+1}dx$

43. $\int \frac{3e^x}{\left(e^x+2\right)^3}dx$

44. $\int \frac{5e^x}{\sqrt[4]{3e^x+1}}dx$

45. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

46. $\int x^2 \ln x dx$

47. $\int \frac{2}{\sqrt[6]{x^5}}dx$

48. $\int \left(\frac{5}{x^2}+5^x-3x^5+2\right)dx$

49. $\int \frac{4x^2-3x+6}{2x}dx$

50. $\int \frac{2x^2}{3x^3-10}dx$

51. $\int \frac{5}{(6x-1)^8}dx$

52. $\int 7x\cdot\sqrt[4]{3-x^2}dx$

53. $\int \frac{8x^2}{2-4x^3}dx$

54. $\int \frac{5x}{\left(2+x^2\right)^3}dx$

55. $\int e^x\cdot\left(2e^x+2\right)dx$

56. $\int e^{10x-3}dx$

57. $\int 3x^2\cdot e^{1-2x^3}dx$

58. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{2x}dx$

59. $\int \frac{15x^3+5x}{3x^4+2x^2}dx$

60. $\int \frac{3x^4-2x}{4x^5}dx$

61. $\int \frac{12x-4}{\sqrt[3]{9x^2-6x}}dx$

62. $\int \frac{3}{x\cdot\ln^4 x}dx$

63. $\int (2x-5)^7dx$

64. $\int (5x-10)\cdot e^{x^2-4x+1}dx$

65. $\int \frac{2}{\sqrt[5]{(7x+5)^3}}dx$

66. $\int \frac{4}{11x-3}dx$

67. $\int (2x^7+3^x+4x^{-3})dx$

68. $\int\left(7\cdot 4^x+\frac{x^2}{5}+\frac{1}{3x}\right)dx$

69. $\int\frac{8-4x^4+10x^2}{2x^3}dx$

70. $\int\frac{1-2x^4+4\sqrt{x}}{3x}dx$

71. $\int\frac{1-4x^2+3\sqrt{x}}{2x^3}dx$

72. $\int(5x^4-7^x-3x^{-6})dx$

73. $\int\frac{3-6x^2+5\sqrt{x}}{2x^3}dx$

74. $\int\frac{3}{\sqrt{2x+1}}dx$

75. $\int\frac{12x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^5}}dx$

76. $\int 11x^2\cdot\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^7}\,dx$

77. $\int\left(3x^4-6\right)\cdot\sqrt{2x^5-20x}\,dx$

78. $\int\left(3x^3-3x\right)\cdot\sqrt{\left(2x^4-4x^2\right)^7}\,dx$

79. $\int\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx$

80. $\int\frac{3x^4-6}{\sqrt[4]{2x^5-20x}}dx$

81. $\int\frac{7x}{\sqrt[4]{\left(2x^2-4\right)^3}}dx$

82. $\int\frac{4x^3}{\sqrt[3]{3x^5+12}}dx$

83. $\int\frac{21x^2}{\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)^4}}dx$

84. $\int\frac{2x}{3x^2+8}dx$

85. $\int\frac{5\ln^3 x}{x}dx$

86. $\int\frac{3x^2-2}{2x^3-4x}dx$

87. $\int\frac{5x^4-2x^2}{3x^5-2x^3}dx$

88. $\int\frac{2}{x+3}dx$

89. $\int\frac{4x^2-2x}{4x^3-3x^2}dx$

90. $\int\frac{6x^4}{2x^5+8}dx$

91. $\int\left(14x^2+7\right)\cdot e^{4x^3+6x}dx$

92. $\int\left(10x^2+15\right)\cdot e^{2x^3+9x}dx$

93. $\int 7x^2\cdot e^{2x^3-4}dx$

94. $\int(24x^3+10)\cdot e^{3x^4+5x}dx$

95. $\int\left(9x^2-3x\right)\cdot e^{2x^3-x^2}dx$

7.2. Határozott integrál

7.2.1. Alapszabályok

[1.] $\int_a^a f(x)dx = 0$

[2.] $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

[3.] $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$

[4.] $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

[5.] $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

7.2.2. Newton-Leibniz szabály

[6.] $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

96. $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)dx$

97. $\int_{-1}^1 \frac{5}{(3x+4)^3} dx$

98. $\int_{-3}^{-2} \frac{9x+3}{3x^2+2x} dx$

99. $\int_{-1}^0 3x \cdot e^{5x^2-1} dx$

100. $\int_0^1 2x \cdot e^{5x} dx$

101. $\int_1^2 \frac{6x^3 + 3x + 2\sqrt{x}}{3x} dx$

102. $\int_1^2 \frac{8x^3 + 2x + 3}{2x} dx$

103. $\int_1^2 \frac{4x^3 + 2x + 7}{2x} dx$

104. $\int_1^2 \frac{14x+21}{\sqrt{6x^2+18x}} dx$

105. $\int_0^1 e^x \cdot (1-e^x)^4 dx$

106. $\int_1^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4x+3)^2}} dx$

107. $\int_0^1 (12x^2+8) \cdot \sqrt{x^3+2x}\, dx$

108. $\int_0^1 \sqrt{(2x^4+4x)^3} \cdot (6x^3+3)dx$

109. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

110. $\int_1^2 \frac{15x^3+6x}{\sqrt{4x^2+5x^4}}dx$

111. $\int_0^1 e^{x^6+2}\cdot 3x^5 dx$

112. $\int_{-2}^1 (21x^2+14)e^{x^3+2x+4}dx$

113. $\int_{-2}^1 (15x^2+10)e^{x^3+2x+4}dx$

7.2.3. Impropius integrál

[7.] $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

[8.] $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

[9.] $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$

114. $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$

115. $\int_{-\infty}^{-3} e^x dx$

116. $\int_0^{\infty}\frac{3x}{x^2+5}dx$

7.2.4. Területszámítás

117. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény alatti területet az $[1;3]$ intervallumon!

118. Határozzuk meg az $f(x)=x^2-4x$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területét!

119. Határozzuk meg az $f(x)=x^2+x-2$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területét az $x_1=-2$ és az $x_2=3$ abszcisszájú pontok között!

120. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ és az $g(x)=x+2$ függvények grafikonjai által közrezárt síkrész területét!

121. Határozzuk meg az $f(x)=x^2-2x-10$ és az $g(x)=-x^2+8x+2$ függvények grafikonjai által közrezárt síkrész területét!

122. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény, a függvény 2 abszcisszájú pontjába húzott érintő és az x tengely által határolt síkrész területét!

123. x tengely és az $f(x)=2x^2-2x-24$

124. x tengely és az $f(x)=6x^3-12x^2$

125. x tengely és az $f(x) = 4x^2 + 24x + 20$

126. x tengely és az $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$

127. x tengely és az $f(x) = (x-1)^2 - 4$

128. x tengely és az $f(x) = (x+2)^2 - 1$

129. x tengely és az $f(x) = x^3 - 4x$

130. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ $\quad g(x) = 8x + 5$

131. $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$ $\quad g(x) = -2x^2 + 1$

132. $f(x) = x^2 - 8x + 17$ $\quad g(x) = -x^2 + 14x - 39$

133. $f(x) = 6x^2 + 8x - 20$ $\quad g(x) = x^2 - 2x + 20$

134. $f(x) = 6x^2 + 8x - 20$ $\quad g(x) = x^2 - 2x + 20$

135. $f(x) = 3x^2 + 7x - 100$ $\quad g(x) = -2x^2 + 2x - 40$

136. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad g(x) = x + 1$

137. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ $\quad g(x) = 2x + 2$

Megoldások

1. Sorozatok

1. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$, tehát a sorozat szig. mon. növekedő.

   határérték: $A = 2$

   korlátosság: $-\dfrac{1}{2} \le a_n < 2$

2. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{9}{(3n+1)(3n-2)} > 0$, tehát a sorozat szig. mon. növekedő.

   határérték: $A = 2$

   korlátosság: $-1 \le a_n < 2$

3. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-4}{(5+3n)(2+3n)} < 0$, tehát a sorozat szig. mon. csökkenő.

   határérték: $A = \dfrac{1}{3}$

   korlátosság: $\dfrac{1}{3} < a_n \le \dfrac{3}{5}$

4. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{9}{(5n+7)(5n+2)} > 0$, tehát a sorozat szig. mon. növekedő.

   határérték: $A = \dfrac{2}{5}$

   korlátosság: $\dfrac{1}{7} \le a_n < \dfrac{2}{5}$

5. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{17}{(7-2n)(9-2n)} > 0$, ha $n \ge 5$ tehát a sorozat az 5. tagtól kezdve szig. mon. növekedő (tehát az egész sorozat nem monoton).

   határérték: $A = -\dfrac{1}{2}$

   korlátosság: $-9 \le a_n \le 8$

6. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-22}{(4n+2)(4n-2)} < 0$, tehát a sorozat szig. mon. csökkenő.

   határérték: $A = \dfrac{3}{4}$

   korlátosság: $\dfrac{3}{4} < a_n \le \dfrac{7}{2}$

7. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{-1}{(2n+1)(n-1)}<0$, tehát a sorozat szig. mon. csökkenő.

határérték: $A=-\dfrac{5}{2}$

korlátosság: $-\dfrac{5}{2}<a_n\le -2$

8. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{7}{(-3n-2)(1-3n)}>0$, tehát a sorozat szig. mon. növekedő.

határérték: $A=-\dfrac{1}{3}$

korlátosság: $-\dfrac{3}{2}\le a_n<-\dfrac{1}{3}$

9. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{-9}{(2n-5)(2n-7)}<0$, ha $n\ge 4$ tehát a sorozat a 4. tagtól kezdve szig. mon. csökkenő (tehát az egész sorozat nem monoton).

határérték: $A=\dfrac{1}{2}$

korlátosság: $-4\le a_n\le 5$

10. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n-2}{n(n+1)(n+2)}>0$, ha $n\ \ge\ 3$ tehát a sorozat a 3. tagtól kezdve szig. mon. növekedő (tehát az egész sorozat nem monoton).

határérték: $A=1$

korlátosság: $\dfrac{5}{6}\le a_n\le 1$

11. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n}{3n+4}-\dfrac{n-1}{3n+1}=\dfrac{4}{(3n+4)\cdot(3n+1)}>0\ \Rightarrow$ szig. mon. növekedő

határérték: $\lim\dfrac{n-1}{3n+1}=\dfrac{1}{3}$

korlátosság: $0\le a_n<\dfrac{1}{3}$

12. monotonitás: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+6}{2n+1}-\dfrac{n+5}{2n-1}=\dfrac{-11}{(2n+1)\cdot(2n-1)}<0\ \Rightarrow$ szig. mon. csökkenő

határérték: $\lim\dfrac{n+5}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$

korlátosság: $a_1=6\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2}<a_n\le 6$

13. monotonitás: $a_n - a_n = \dfrac{1-2(n+1)}{2(n+1)+2} - \dfrac{1-2n}{2n+2} = \dfrac{-6}{(2n+4)(2n+2)} < 0 \Rightarrow$ szig. mon. csökkenő

határérték: $\lim \dfrac{1-2n}{2n+2} = -1$

korlátosság: $a_1 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow -1 < a_n \le -\dfrac{1}{4}$

14. monotonitás: $a_n - a_n = \dfrac{4(n+1)+6}{4(n+1)-1} - \dfrac{4n+6}{4n-1} = \dfrac{-28}{(4n+3)(4n-1)} < 0 \Rightarrow$ szig. mon. csökkenő

határérték: $\lim \dfrac{4n+6}{4n-1} = 1$

korlátosság: $a_1 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 1 < a_n \le \dfrac{10}{3}$

15. monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3(n+1)^2-2}{(n+1)^2} - \dfrac{3n^2-2}{n^2} = \dfrac{4n+2}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ szig. mon. növekedő

határérték: $\lim \dfrac{3n^2-2}{n^2} = 3$

korlátosság: $a_1 = 1 \Rightarrow 1 < a_n \le 3$

16. $A = 0$

17. $A = -\infty$

18. $A = -\dfrac{7}{2}$

19. $A = +\infty$

20. $A = \dfrac{4}{3}$

21. $A = -\dfrac{1}{4}$

22. $A = -\dfrac{11}{5}$

23. $A = -\dfrac{5}{11}$

24. $A = \dfrac{9}{7}$

25. $A = \dfrac{1}{4}$

26. $A = 0$

27. $A = 0$

28. $A = -\infty$

29. $A = +\infty$

30. $A = +\infty$

31. $A = 0$

32. $A = +\infty$

33. $A = \dfrac{3}{2}$

34. $A = -\dfrac{1}{4}$

35. $A = \dfrac{1}{8}$

36. $A = 0$

37. $A = 0$

38. $A = \dfrac{4}{27}$

39. $A = -49$

40. $A = \dfrac{2}{3}$

41. $A = +\infty$

42. $A = -\infty$

43. $A = e^{-3}$

44. $A = e^{5}$

45. $A = e$

46. $A = e^{-6}$

47. $A = e^{-4}$

48. $A = e^{12}$

49. $A = e^{-3}$

50. $A = e^{-8}$

51. $A = 0$

52. $A = 0$

53. $A = +\infty$

54. $A = e^{-5}$

55. $A = +\infty$

56. $$\lim\left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{6n}=\lim\left[\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n}\right]^6=\left(\frac{e^3}{e^{-5}}\right)^6=e^{48}$$

57. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{-5/2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1/2}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^3=\frac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}\cdot 1=e^3$$

58. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5/2}{n}\right)^n}\right]^3\cdot\left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^{-2}=\left(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{5}{2}}}\right)^3\cdot 1=e^{12}$$

59. $$\lim\left(\frac{3n-6}{3n+1}\right)^{3n}=\lim\left[\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n}\right]^3=\left(\frac{e^{-2}}{e^{\frac{1}{3}}}\right)^3=e^{-7}$$

60. $$\lim\left(\frac{4n-2}{4n+5}\right)^{n+3}=\lim\frac{\left(1-\frac{2/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/4}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{4n-2}{4n+5}\right)^3=\frac{e^{-\frac{2}{4}}}{e^{\frac{5}{4}}}\cdot 1=e^{-\frac{7}{4}}$$

61. $$\lim\left(\frac{5n+2}{5n-8}\right)^{3n-1}=\lim\left[\frac{\left(1+\frac{2/5}{n}\right)}{\left(1-\frac{8/5}{n}\right)}\right]^{n\,3}\cdot\left(\frac{5n+2}{5n-8}\right)^{-1}=\left(\frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{-\frac{8}{5}}}\right)^3\cdot 1=e^6$$

62. $$\lim\frac{\sqrt[4]{n^8+7n}+10n^2}{2n-\sqrt{25n^4+3n}}=\lim\frac{\sqrt[4]{1+\frac{7}{n^7}}+10}{\frac{2}{n}-\sqrt{25+\frac{3}{n^3}}}=-\frac{11}{5}$$

63. $$\lim\frac{\sqrt{5n^3}+2n^3+\sqrt[4]{n^8+3n}}{\sqrt{49n^6+2n}}=\lim\frac{\sqrt{\frac{5}{n^3}}+2+\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n^{11}}}}{\sqrt{49+\frac{2}{n^5}}}=\frac{2}{7}$$

64. $$\lim\frac{2n^3+\sqrt[4]{n^8}}{\sqrt{49n^6+2n}}=\lim\frac{2+\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}}}{\sqrt{49+\frac{2}{n^5}}}=\frac{2}{7}$$

65. $$\lim\frac{\sqrt{5n^3+4n}+\sqrt[4]{n^8+3n}}{\sqrt{9n^4+2n}}=\lim\frac{\sqrt{\frac{5}{n}+\frac{4}{n^3}}+\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^7}}}{\sqrt{9+\frac{2}{n^3}}}=\frac{1}{3}$$

66. $$\lim\frac{\sqrt[4]{n^8+3n}+3n^2}{4n-\sqrt{16n^4+2n}}=\lim\frac{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^7}}+3}{\frac{4}{n}-\sqrt{16+\frac{2}{n^3}}}=-1$$

67. $$\lim\frac{-9n-\sqrt[4]{n^8+4n^4+2}}{\sqrt{n^4}+4n}=\lim\frac{-\frac{9}{n}-\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^8}}}{1+\frac{4}{n}}=-1$$

68. $$\lim\frac{7\left(n^2+1\right)-3n(n+2)}{3n^2+5}=\lim\frac{4n^2-6n+7}{3n^2+5}=\frac{4}{3}$$

69. $$\lim\frac{3^{-n}-5^{n+1}}{2\cdot5^{n-1}+3^{n+2}}=\lim\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-5\cdot5^n}{\frac{2}{5}\cdot5^n+9\cdot3^n}=\lim\frac{\left(\frac{1}{15}\right)^n-5}{\frac{2}{5}+9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}=-\frac{25}{2}$$

70. $$\lim\frac{5^{n+3}-7^{n+1}}{\left(\frac{1}{7}\right)^{-n}+5^{n-1}}=\lim\frac{125\cdot5^n-7\cdot7^n}{7^n+\frac{5^n}{5}}=\lim\frac{125\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n-7}{1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n}=-7$$

71. $$\lim\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{-n}+2^{3n}}{8^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}}=\lim\frac{7^n+8^n}{8\cdot8^n-3^n}=\lim\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^n+1}{8-\left(\frac{3}{8}\right)^n}=\frac{1}{8}$$

72. $\lim \dfrac{5\cdot 7^{n+1}-4^n}{3\cdot 4^{n+1}+7^{n+2}}=\lim \dfrac{5\cdot 7\cdot 7^n-4^n}{3\cdot 4\cdot 4^n+49\cdot 7^n}=\lim \dfrac{35-\left(\frac{4}{7}\right)^n}{12\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n+49}=\dfrac{35}{49}=\dfrac{5}{7}$

73. $\lim \dfrac{3\cdot 4^n-9^{n-1}}{9^{n+2}}=\lim \dfrac{3\cdot 4^n-\frac{9^n}{9}}{81\cdot 9^n}=\lim \dfrac{3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n-\frac{1}{9}}{81}=-\dfrac{1}{729}$

74. $A=-\dfrac{1}{2}$ $\quad n_0=125$

75. $A=\dfrac{4}{5}$ $\quad n_0=7$

76. $A=0$ $\quad n_0=100$

77. $A=\dfrac{5}{3}$ $\quad n_0=1106$

78. $A=2$ $\quad n_0=99$

79. $A=0$ $\quad n_0=101$

80. $A=0$ $\quad n_0=6$

81. $A=\dfrac{3}{2}$ $\quad n_0=377$

82. $A=-\dfrac{1}{2}$ $\quad n_0=3255$

83. $A=\dfrac{4}{7}$ $\quad n_0=41$

84. $\lim \dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$ $\quad \left|\dfrac{n}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{100}$ $\quad n>25{,}5 \Rightarrow n_0=25$

85. $\lim \dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$ $\quad \left|\dfrac{2n}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{1}{100}$ $\quad n>21{,}89 \Rightarrow n_0=21$

86. $\lim \dfrac{3n-7}{1+n}=3$ $\quad \left|\dfrac{3n-7}{1+n}-3\right|<\dfrac{1}{1000}$ $\quad n>9999 \Rightarrow \mathrm{n}_0=9999$

87. $\lim \dfrac{4n+2}{5+3n}=\dfrac{4}{3}$ $\quad \left|\dfrac{4n+2}{5+3n}-\dfrac{4}{3}\right|<\dfrac{1}{1000}$ $\quad n>1553{,}89 \quad n_0=1553$

88. $\lim \dfrac{5n-9}{-4-2n}=-\dfrac{5}{2}$ $\quad \left|\dfrac{5n-9}{-4-2n}+\dfrac{5}{2}\right|<\dfrac{1}{100}$ $\quad n>948 \Rightarrow \mathrm{n}_0=948$

2. Pénzügyi számítások

1. **a.** $5000+\dfrac{250}{1{,}15}+\dfrac{250}{1{,}15^2}+\dfrac{250}{1{,}15^3}+\dfrac{250}{1{,}15^4}=5713{,}745\,\mathrm{eFT}$

   b. $3000+\dfrac{3000}{1{,}15^2}=5268{,}431\,\mathrm{eFt}$

c. 5500 eFt

A **b.** ajánlat a legjobb.

2. **a.** $500+\frac{100}{1{,}12}+\frac{100}{1{,}12^2}+\frac{100}{1{,}12^3}+\frac{100}{1{,}12^4}=803{,}735\,\text{eFt}$

b. $700+\frac{200}{1{,}12^5}=813{,}485\,\text{eFt}$

A **b.** ajánlat a kedvezőbb.

3. **a.** Első ajánlat: $3+\frac{4}{1{,}1}+\frac{4}{1{,}1^2}=9{,}942\,\text{mFt}$

Második ajánlat: $7+\frac{3}{1{,}1^2}=9{,}479\,\text{mFt}$

Tehát az első ajánlat a kedvezőbb.

b. $900+\frac{700}{1{,}07}+\frac{400}{1{,}07^2}=1903{,}581\,\text{eFt}$

$3+\frac{4}{q}+\frac{4}{q^2}=7+\frac{3}{q^2}\Rightarrow \quad q_1=1{,}207 \quad q_2=-0{,}207 \Rightarrow \text{q}_1 \text{ a jó megoldás } \Rightarrow \text{r}_1=20{,}7\%$

Tehát 20,7%-os kamatláb esetén azonos a két ajánlat.

4. **a.** $150+\frac{20}{1{,}13}+\frac{20}{1{,}13^3}=181{,}560\,\text{eFt}$

b. $100+\frac{60}{1{,}13^2}+\frac{40}{1{,}13^4}=171{,}522\,\text{eFt}$

c. $\frac{200}{1{,}13^2}=156{,}629\,\text{eFt}$

A **c.** ajánlat a legjobb.

5. $S_7=800\cdot 1{,}12\cdot\frac{1{,}12^7-1}{0{,}12}=9039{,}755\,\text{eFt}$

$S_{14}=7039{,}755\cdot 1{,}12^7=15562{,}654\,\text{eFt}$

6. **a.** $S_8=400\cdot 1{,}055\cdot\frac{1{,}055^8-1}{0{,}055}$

$S_{13}=400\cdot 1{,}055\cdot\frac{1{,}055^8-1}{0{,}055}\cdot 1{,}055^5=5361{,}808\ \text{eFt}$

b. $12000=300\cdot 1{,}055\cdot\frac{1{,}055^n-1}{0{,}055} \qquad 1{,}055^n=3{,}085 \qquad \Rightarrow \text{n}=21{,}04\text{év}$

7. **a.** $k_5 = 25 \cdot 1{,}125^5 = 45{,}050812 \text{ mFt}$

b. $S_5 = 5 \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} = 31{,}679645 \text{ mFt}$

$k_5 - S_5 = 27{,}140808 - 14{,}783599 = 13{,}371169 \text{ mFt}$ a különbség.

8. **a.** $S_7 = 980 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^7 - 1}{0{,}11} = 10642{,}246 \text{ eFt}$

b. $15000 = 980 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^n - 1}{0{,}11} \Rightarrow 1{,}11^n = 2{,}52 \Rightarrow \text{n} = 8{,}86 \text{ év}$

9. **a.** $S_{15} = 500 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^{15} - 1}{0{,}11} = 19094{,}974 \text{ eFt}$

b. $8000 = 500 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^n - 1}{0{,}11}$ $\quad 1{,}11^n = 2{,}59 \Rightarrow \text{n} = 9{,}1 \text{ év}$

10. **a.** $S_{12} = 850 \cdot 1{,}095 \cdot \dfrac{1{,}095^{12} - 1}{0{,}095} = 19315{,}089 \text{ eFt}$

b. $19315{,}089 = \dfrac{3000}{1{,}095^n} \cdot \dfrac{1{,}095^n - 1}{0{,}095}$ $\quad 1{,}095^n = 2{,}575 \Rightarrow \text{n} = 10{,}42 \text{ év}$

11. $S_n = 400 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^{10} - 1}{1{,}11 - 1} = 7424{,}572 \text{ eFt} = \text{V}_\text{n}$

$\text{V}_\text{n} = 7424{,}572 = \dfrac{\text{a}}{1{,}1^8} \cdot \dfrac{1{,}1^8 - 1}{1{,}1 - 1} \rightarrow a = 1391{,}692 \text{ eFt}$

12. **a.** $50 = \dfrac{a}{1{,}18^{15}} \cdot \dfrac{1{,}18^{15} - 1}{0{,}18} \Rightarrow \text{a} = 9{,}820139 \text{ mFt}$

b. $50 = \dfrac{12}{1{,}18^n} \cdot \dfrac{1{,}18^n - 1}{0{,}18}$ $\quad 1{,}18^\text{n} = 4 \Rightarrow \text{n} = 8{,}38 \text{ év}$

13. **a** $6500 = \dfrac{a}{1{,}095^{16}} \cdot \dfrac{1{,}095^{16} - 1}{0{,}095} \Rightarrow a = 806{,}226 \text{ eFt}$

b. $6500 = \dfrac{990}{1{,}095^n} \cdot \dfrac{1{,}095^n - 1}{0{,}095}$ $\quad 1{,}095^n = 2{,}66 \rightarrow n = 10{,}77 \, év$

14. **a.** $12=\frac{a}{1{,}09^{25}}\cdot\frac{1{,}09^{25}-1}{0{,}09} \Rightarrow$ a $=1221675$ Ft

b. $12=\frac{1{,}5}{1{,}09^{n}}\cdot\frac{1{,}09^{n}-1}{0{,}09}$ $1{,}09^{n}=3{,}57 \Rightarrow n=14{,}77\ év$

15. **a.** $1500=\frac{400}{1{,}2^{n}}\cdot\frac{1{,}2^{n}-1}{0{,}2}$ $1{,}2^{n}=4 \Rightarrow n=7{,}6$ év

b. $1500=\frac{a}{1{,}22^{5}}\cdot\frac{1{,}22^{5}-1}{0{,}22} \rightarrow a=523{,}809$ eFt

3. Függvények határértéke

1. $-\infty$
2. ∞
3. 3
4. 0
5. $\frac{7}{8}$
6. $\frac{5}{4}$
7. 0
8. $\frac{7}{5}$
9. -1
10. $bal\ -\infty,\ jobb\ +\infty$
11. ∞
12. $bal\ +\infty,\ jobb\ -\infty$
13. $-\infty$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2+2x-40}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(2x+10)}{(x-4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x+10}{x+1}=\frac{18}{5}$ vagy $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4x+2}{2x-3}=\frac{18}{5}$

15. $\lim\limits_{7}\frac{4x+3}{x^2-10x+21}=\lim\limits_{7}\frac{4x+3}{(x-7)(x-3)}=\left(\frac{31}{0}\right)$

$\lim\limits_{7^+}\frac{4x+3}{(x-7)(x-3)}=\frac{31}{0^+\cdot 4}=\infty$ $\lim\limits_{7^-}\frac{4x+3}{(x-7)(x-3)}=\frac{31}{0^-\cdot 4}=-\infty$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+10}{x^2+9x-22}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-21+10}{9+27-22}=-\frac{2}{14}=-\frac{1}{7}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x-4}{x^2-8x+2}=-\frac{-5}{-5}=1$

18. $\lim\limits_{-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1$

19. $$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3+2x^2-7}{x^2-4x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+2-\frac{7}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}=-\infty$$

20. $$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+5x^2-10x}{1+6x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+5-\frac{10}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+6}=\frac{-\infty}{+6}=-\infty$$

21. $$\lim_{-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2\right)=-\infty$$

22. $$D_f=\{x\in R | x\neq 0; x\neq -2\}$$

$$\lim_{-2}\frac{x^2-4x-12}{x^2+2x}=\lim_{-2}\frac{(x+2)(x-6)}{x(x+2)}=\lim_{-2}\frac{x-6}{x}=4$$

$$\lim_{\infty}\frac{x^2-4x-12}{x^2+2x}=1 \qquad \lim_{-\infty}\frac{x^2-4x-12}{x^2+2x}=1$$

23. $$D_f=\{x\in R | x\neq 4,\ x\neq 3\}$$

$$\lim_{4}\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-3)}=\lim_{4}\frac{x+1}{x-3}=5 \qquad \lim_{\infty}\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}=1 \qquad \lim_{-\infty}\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}=1$$

24. $$D_f=\{x\in R | x\neq -3,\ x\neq 3\}$$

$$\lim_{3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{3}\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{3}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=1 \qquad \lim_{-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=1$$

25. $$D_f=\{x\in R | x\neq -2, x\neq 1\}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-10x+8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-4)}{x+2}=-2$$ vagy $$\lim_{1}\frac{4x-10}{2x+1}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-10x+8}{x^2+x-2}=2 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-10x+8}{x^2+x-2}=2$$

26. $$D_f=\{x\in R | x\neq 6;\ x\neq 4\}$$

$$\lim_{6}\frac{2x^2-11x-6}{x^2-10x+24}=\lim_{6}\frac{(x-6)\cdot(2x+1)}{(x-6)(x-4)}=\lim_{6}\frac{2x+1}{x-4}=\frac{13}{2}$$

$$\lim_{\infty}\frac{2x^2-11x-6}{x^2-10x+24}=2 \qquad \lim_{-\infty}\frac{2x^2-11x-6}{x^2-10x+24}=2$$

27. $D_f = \{x \in R | x \neq 7, x \neq 8\}$

$\lim\limits_{8} \frac{(x-7)(x+2)}{(x-7)(x-8)} = \lim\limits_{8} \frac{x+2}{x-8} = \left(\frac{10}{0}\right)$ $\lim\limits_{8^+} \frac{x+2}{x-8} = \frac{10}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{8^-} \frac{x+2}{x-8} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{\infty} \frac{(x-7)(x+2)}{(x-7)(x-8)} = 1$ $\lim\limits_{-\infty} \frac{(x-7)(x+2)}{(x-7)(x-8)} = 1$

28. $D_f = \{x \in R | x \neq 0, x \neq 5\}$

$\lim\limits_{5} \frac{2x+7}{x(x-5)} = \left(\frac{17}{0}\right)$ $\lim\limits_{5^+} \frac{2x+7}{x(x-5)} = \frac{17}{5 \cdot 0^+} = \infty$ $\lim\limits_{5^-} \frac{2x+7}{x(x-5)} = \frac{17}{5 \cdot 0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{\infty} \frac{2x+7}{x(x-5)} = 0$ $\lim\limits_{-\infty} \frac{2x+7}{x(x-5)} = 0$

4. Differenciálszámítás

1. $f'(x) = -20 \cdot x^{-5}$
2. $f'(x) = \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$
3. $f'(x) = 4x - 3 \cdot x^{-2} + 10 \cdot x^{-3}$
4. $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot x^3 + 3^x \cdot 3x^2$
5. $f'(x) = (8x+2) \cdot \ln x + (4x^2 + 2x - 10) \cdot \frac{1}{x}$
6. $f'(x) = 2x \cdot e^{3x+5} + x^2 \cdot e^{3x+5} \cdot 3$
7. $f'(x) = \frac{3 \cdot (2x^2 - x) - (3x+12) \cdot (4x-1)}{(2x^2 - x)^2}$
8. $f'(x) = \frac{\left(15x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot (2^x + x^2) - (5x^3 + \ln x) \cdot (2^x \cdot \ln 2 + 2x)}{(2^x + x^2)^2}$
9. $f'(x) = 10 \cdot (9x + 12x^2)^9 \cdot (9 + 24x)$
10. $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (5x^2 - 7x + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (10x - 7)$
11. $f'(x) = \frac{6}{3x-2}$
12. $f'(x) = 7 \cdot e^{-x^2+3x-2} \cdot (-2x+3)$
13. $f'(x) = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
14. $f'(x) = \frac{16 \ln x}{x}$
15. $f'(x) = (6x-4) \cdot \ln 2x + (3x^2 - 4x) \cdot \frac{1}{x}$
16. $f'(x) = 24e^{6x-1} \cdot 5^x + 4e^{6x-1} \cdot 5^x \cdot \ln 5$

17. $f'(x)=\dfrac{5x-\ln 2x\cdot 10x}{25x^4}$

18. $f'(x)=\dfrac{(6x^2-5)\cdot\ln(9x^2)-(2x^3-5x)\cdot\dfrac{2}{x}}{\ln^2(9x^2)}$

19. $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{\ln(3x-8x^2)}}\cdot\dfrac{1}{3x-8x^2}\cdot(3-16x)$

20. $f'(x)=\dfrac{5\cdot e^{6x^2+3x}\cdot(12x+3)}{2\sqrt{5\cdot e^{6x^2+3x}}}$

21. $f'(x)=\dfrac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}$

22. $f'(x)=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

23. $f'(x)=\dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}$

24. $f'(x)=28x^6-3\cdot x^{-4}+x^{-\frac{3}{2}}$

25. $f'(x)=\dfrac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{3}{2}}$

26. $f'(x)=-\dfrac{15}{2}x^{-\frac{5}{2}}+10x^{-\frac{8}{3}}$

27. $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot(6x-5)+(\ln x)\cdot 6$

28. $f'(x)=(12x^3-6x^2+1)\cdot 2^x+2^x\cdot\ln 2\cdot(3x^4-2x^3+x)$

29. $f'(x)=\dfrac{-3x^2+6}{(x^2-4x+2)^2}$

30. $f'(x)=\dfrac{(12x^2+20x+6)\cdot x^2}{(3x^2+5x^3)^2}$

31. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x+2)\cdot 2x}{x^4}$

32. $f'(x)=\dfrac{14x\cdot e^x-(7x^2+4)\cdot e^x}{e^{2x}}$

33. $f'(x)=\dfrac{5^x\ln 5\ln x-5^x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}$

34. $f'(x)=21\cdot(3x-8)^6$

35. $f'(x)=\dfrac{1}{2}(6x^4-2x^5)^{-\frac{1}{2}}\cdot(24x^3-10x^4)$

36. $f'(x)=e^{-3x^2+5x}(-6x+5)$

37. $f'(x)=\dfrac{30x^2-20}{2x^3-4x+3}$

38. $f'(x)=5\ln 2\cdot 2^{5x-9}$

39. $f'(x)=-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

40. $f'(x)=\dfrac{7}{15}x^{-\frac{8}{15}}$

41. $f'(x)=\dfrac{11}{15}x^{-\frac{4}{15}}$

42. $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln x+3\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}$

43. $f'(x)=2e^x\cdot x^8+2e^x\cdot 8x^7$

44. $f'(x)=(10x+3)\cdot 6^x+(5x^2+3x+2)\cdot 6^x\cdot\ln 6$

45. $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+2^x\right)+(5x+6)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2^x\cdot\ln 2\right)$

46. $f'(x)=\dfrac{2\cdot 2^x-2x\cdot 2^x\cdot\ln 2}{2^{2x}}$

47. $f'(x)=\dfrac{\frac{5}{x}+6-\ln x}{(x+5)^2}$

48. $f'(x)=\dfrac{(6x+4)(x^3-2)-(3x^2+4x)\cdot 3x^2}{(x^3-2)^2}$

49. $f'(x)=\dfrac{8^x\cdot\ln 8\cdot\left(\sqrt{x}+2x\right)-\left(8^x+1\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2x\right)^2}$

50. $f'(x)=480(6x-5)^7$

51. $f'(x)=(3x^2+8x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x+4)$

52. $f'(x)=\dfrac{6}{6x-1}$

53. $f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x+6)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}$

54. $f'(x)=-15\cdot e^{-3x}$

55. $f'(x)=(8x-6)\cdot e^{2x^2-3x+5}$

56. $f'(x)=2^{-3x^2+6x}\cdot\ln 2\cdot(-6x+6)$

57. $f'(x)=-72x^2\cdot 7^{5-8x^3}\cdot\ln 7$

58. $f'(x)=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$

59. $f'(x)=20x^3\cdot 5^{4x}+20x^4\cdot 5^{4x}\cdot\ln 5$

60. $f'(x)=\dfrac{1-5\ln 5x}{x^6}$

5. Függvényelemzés

1. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+3$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-2 \quad x_2=1$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	MAX	↓	MIN	↑

MAX$(-2;23)$ MIN$(1;-4)$

2. $f(x)=x^3-3x^2-24x+5$

$$f'(x)=3x^2-6x-24=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad x_2=4$$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$x>4$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↑	MAX	↓	MIN	↑

$$\text{MAX}(-2;33) \qquad \text{MIN}(4;-75)$$

3. $f(x)=6x^2-x^4$

$$f'(x)=12x-4x^3=4x\left(3-x^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=0 \quad x_3=\sqrt{3}$$

	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	–	0	+		–
$f(x)$	↑	MAX	↓	MIN	↑	MAX	↓

$$\text{MAX}\left(-\sqrt{3};9\right) \qquad \text{MIN}(0;0) \qquad \text{MAX}\left(\sqrt{3};9\right)$$

4. $f(x)=-3x^4-4x^3$

$$f'(x)=-12x^3-12x^2=-12x^2(x+1)=0 \quad \to \quad x_1=0 \quad x_2=-1$$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	+	0	–	0	–
$f(x)$	↑	MAX	↓		↓

$$\text{MAX}(-1,1)$$

5. $f(x)=e^{2x}\cdot(3x-4)$

$$f'(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot(3x-4)+e^{2x}\cdot 3=e^{2x}\cdot(6x-5)=0 \to x=\frac{5}{6}$$

	$x<\frac{5}{6}$	$x=\frac{5}{6}$	$x>\frac{5}{6}$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↓	MIN	↑

$$\text{MIN}\left(\frac{5}{6};\ -7{,}9\right)$$

6. $f(x)=\left(1+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x^2}+\left(1+x^2\right)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2x^3\cdot e^{-x^2}=0 \quad \to \quad x=0$$

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↑	MAX	↓

$$\mathrm{MAX}(0;1)$$

7. $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x}$ $\quad D_f=R\setminus\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{4x\cdot x-(2x^2+2)}{x^2}=0 \qquad 2x^2-2=0\to x_1=-1 \quad x_2=1$

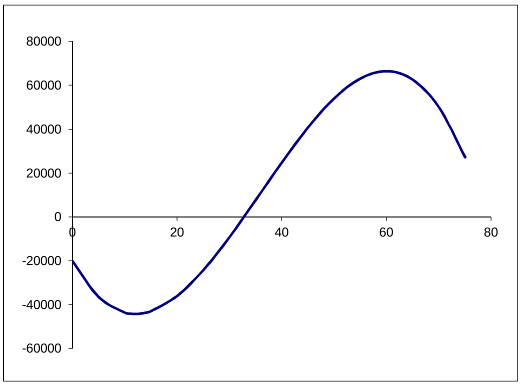
	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↑	MAX	↓	↓	MIN	↑

$\mathrm{MAX}(-1;-4) \qquad \mathrm{MIN}(1;4)$

8. $P(d)=-2d^3+216d^2-4320d-20000$

$P'(d)=-6d^2+432d-4320=0 \qquad \Rightarrow \mathrm{d}_1=12 \quad \mathrm{d}_2=60$

	$0\le d<12$	$d=12$	$12<d<60$	$d=60$	$d>60$
$P'(d)$	−	0	+	0	−
$P(d)$	↓	MIN	↑	MAX	↓



$P(0)=\text{-}2000 \quad \to \mathrm{MAX}(60;66400)$

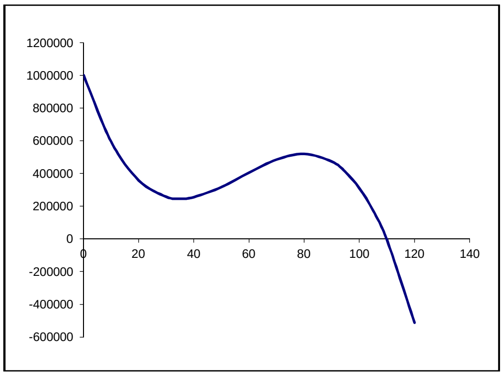
9. $P(d)=-6d^3+1035d^2-50400d+1000000$

$P'(d)=-18d^2+2070d-50400=0 \qquad \Rightarrow \mathrm{d}_1=35 \quad \mathrm{d}_2=80$

	$30\le d<35$	$d=35$	$35<d<80$	$d=80$	$80<d\le 105$
$B'(d)$	−	0	+	0	−
$B(d)$	↓	MIN	↑	MAX	↓

$\mathrm{MIN}(35;246625) \qquad \mathrm{MAX}(80;520000)$

$P(30)=257500 \qquad P(105)=173125$



MIN$(105;173125)$ MAX$(80;520000)$

10. $Q(p)=\dfrac{10p}{16+p^2}$

$Q'(p)=\dfrac{160-10p^2}{(16+p^2)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad p=4$

	$0\le p<4$	$p=4$	$p>4$
$Q'(p)$	+	0	–
$Q(p)$	$\uparrow$	MAX	$\downarrow$

MAX$\left(4;\dfrac{5}{4}\right)$

11. $K(p)=1{,}5p^2+40p+2000$, $B(p)=-p^2+340p+3500$ $(N(p)=B(p)-K(p))$

$N(p)=-2{,}5p^2+300p+1500 \qquad N'(p)=-5p+300=0 \quad \Rightarrow p=60$

	$0\le x<60$	$x=60$	$x>60$
$N'(x)$	+	0	–
$N(x)$	$\uparrow$	MAX	$\downarrow$

MAX$(60{,}10500)$

12. $K(x)=500+4x$, $B(x)=100x-\dfrac{1}{4}x^2$ $(N(x)=B(x)-K(x))$

$N(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+96x-500$

$N'(x)=-\dfrac{x}{2}+96=0 \quad \Rightarrow \; x=192$

	$0<x<192$	$x=192$	$192<x<200$
$N'(x)$	+	0	–
$N(x)$	$\uparrow$	MAX	$\downarrow$

MAX$(192;8716)$

13. $K(x)=200+50x+\frac{1}{10}x^2$, $B(x)=100x-\frac{1}{10}x^2$ $\left(N(x)=B(x)-K(x)\right)$

$$N(x)=-\frac{1}{5}x^2+50x-200$$

$$N'(x)=-\frac{2x}{5}+50=0 \quad \Rightarrow \quad x=125$$

	$0<x<125$	$x=125$	$125<x<140$
$N'(x)$	+	0	−
$N(x)$	↑	MAX	↓

$$\mathrm{MAX}(125;2925)$$

14. $K(d)=784+72d+0{,}16d^2$ $\left(A(d)=\frac{K(d)}{d}\right)$

$$A(d)=\frac{784}{d}+72+0{,}16d \qquad A'(d)=-\frac{784}{d^2}+0{,}16=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}=70$$

	$0\le d<70$	$d=70$	$d>70$
$A'(d)$	−	0	+
$A(d)$	↓	MIN	↑

$$\mathrm{MIN}(70{,}94{,}4)$$

15. $K(d)=30d+200+0{,}5d^2$ $\left(A(d)=\frac{K(d)}{d}\right)$

$$A(d)=30+\frac{200}{d}+0{,}5d \qquad A'(d)=-\frac{200}{d^2}+0{,}5=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}=20$$

	$0\le d<20$	$d=20$	$d>20$
$A'(d)$	−	0	+
$A(d)$	↓	MIN	↑

$$\mathrm{MIN}(20{,}50)$$

16. $K(d)=d^2+750d+2500$ $\left(A(d)=\frac{K(d)}{d}\right)$

$$A(d)=d+750+\frac{2500}{d} \qquad A'(d)=1-\frac{2500}{d^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}=50$$

	$0\le d<50$	$d=50$	$d>50$
$A'(d)$	−	0	+
$A(d)$	↓	MIN	↑

$$\mathrm{MIN}(50;850)$$

17. $f(x)=5\cdot e^{4-0,008x}$ $\quad (B(x)=f(x)\cdot x)$

$B(x)=5x\cdot e^{4-0,008x}$ $\quad B'(x)=5\cdot e^{4-0,008x}+5x\cdot e^{4-0,008x}\cdot(-0,008)=0 \quad \Rightarrow\ x=125$

	$0\le x<125$	$x=125$	$x>125$
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	↑	MAX	↓

$\mathrm{MAX}(125;100,43)$

18. $f(x)=3\cdot e^{4-0,01x}$ $\quad (B(x)=f(x)\cdot x)$

$B(x)=3x\cdot e^{4-0,01x}$ $\quad B'(x)=3e^{4-0,01x}+3x\cdot e^{4-0,01x}\cdot(-0,01)=0 \quad \Rightarrow\ x=100$

	$0\le x<100$	$x=100$	$x>100$
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	↑	MAX	↓

$\mathrm{MAX}(100;6025,66)$

19. $f(x)=6\cdot e^{4-0,04x}$ $\quad (B(x)=f(x)\cdot x)$

$B(x)=6x\cdot e^{4-0,04x}$ $\quad B'(x)=6\cdot e^{4-0,04x}+6x\cdot e^{4-0,04x}\cdot(-0,04)=0 \quad \Rightarrow \quad x=25$

	$0\le x<25$	$x=25$	$x>25$
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	↑	MAX	↓

$\mathrm{MAX}(25;51,09)$

20. $f(x)=x^4-24x^2+60x+4$

$f'(x)=4x^3-48x+60 \quad \to f''(x)=12x^2-48=0 \quad \to x_1=-2 \qquad x_2=2$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	INFL.	konkáv	INFL.	konvex

$\mathrm{INFL}_1(-2;-196) \qquad \mathrm{INFL}_2(2;44)$

21. $f(x)=\frac{1}{2}x^4-27x^2+13x-40$

$f'(x)=2x^3-54x+13 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=6x^2-54=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \qquad x_2=3$

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	INFL.	konkáv	INFL.	konvex

$$\mathrm{INFL}_1(-3;-281{,}5) \qquad \mathrm{INFL}_2(3;-203{,}5)$$

22. $f(x)=x^4-10x^3+24x^2$

$f'(x)=4x^3-30x+48 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=12x^2-60x+48=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \qquad x_2=4$

	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$x>4$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	INFL.	konkáv	INFL.	konvex

$$\mathrm{INFL}_1(1;15) \qquad \mathrm{INFL}_2(4;0)$$

23. $f(x)=3x^5+15x^4+12$

$f'(x)=15x^4+60x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=60x^3+180x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \qquad x_2=0$

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f''(x)$	–	0	+	0	+
$f(x)$	konkáv	INFL.	konvex		konvex

$$\mathrm{INFL}_1(-3;498)$$

24. $f'(x)=3\cdot 2^{4-0{,}03x}\cdot \ln 2\cdot(-0{,}03)$ $\qquad f'(20)=3\cdot 2^{3{,}4}\cdot \ln 2\cdot(-0{,}03)$

$f(20)=3\cdot 2^{3{,}4}$ $\qquad E(20)=\dfrac{3\cdot 2^{3{,}4}\cdot \ln 2\cdot(-0{,}03)\cdot 20}{3\cdot 2^{3{,}4}}=-0{,}6\cdot \ln 2=-0{,}42$

25. $f'(p)=5\cdot e^{6-0{,}02p}\cdot(-0{,}02)$ $\qquad f'(120)=-0{,}1\cdot e^{3{,}6}$

$f(120)=5\cdot e^{3{,}6}$ $\qquad E(120)=-2{,}4$

26. $f'(p)=2\cdot e^{6-0{,}01p}\cdot(-0{,}01)$ $\qquad f'(70)=2e^{5{,}3}\cdot(-0{,}01)$

$f(70)=2e^{5{,}3}$ $\qquad E(70)=-0{,}7$

27. $f'(x)=3\cdot e^{6-0{,}01p}\cdot(-0{,}01)$ $\qquad f'(60)=3e^{5{,}4}\cdot(-0{,}01)$

$f(60)=3e^{5{,}4}$ $\qquad E(60)=-0{,}6$

28. $f'(x)=7\cdot e^{6-0{,}08p}\cdot(-0{,}08)$ $\quad f'(40)=7e^{2{,}8}\cdot(-0{,}08)$

$f(40)=7e^{2{,}8}$ $\quad E(40)=-3{,}2$

29. $f'(x)=3\cdot e^{-\frac{11}{100}x+6}\cdot\left(-\frac{11}{100}\right)$ $\quad f'(4)=3\cdot e^{-\frac{11}{25}+6}\cdot\left(-\frac{11}{100}\right)$

$f(4)=3\cdot e^{-\frac{44}{100}+6}$ $\quad E(4)=-\frac{44}{100}=-0{,}44$

30. $f'(x)=\frac{6x+7}{5\cdot(3x^2+7x)}$ $\quad f'(3)=\frac{25}{5\cdot 48}$

$f(3)=\frac{1}{5}\cdot\ln 48$ $\quad E(3)=\frac{\frac{25}{5\cdot 48}}{\frac{1}{5}\cdot\ln 48}\cdot 3=0{,}404$

31. $f'(x)=\frac{36x}{6x^2+7}$ $\quad f'(2)=\frac{72}{31}$

$f(2)=3\cdot\ln 31$ $\quad E(2)=\frac{72\cdot 2}{31\cdot 3\cdot\ln 31}=0{,}45$

32. $f'(x)=\frac{30x}{5x^2+4}$ $\quad f'(3)=\frac{90}{49}$

$f(3)=3\ln 49$ $\quad E(3)=0{,}4719$

33. $f'(x)=\frac{48x}{3x^2-5}$ $\quad f'(4)=\frac{192}{43}$

$f(4)=8\ln 43$ $\quad E(4)=0{,}59$

34. $f'(x)=\frac{20x}{2x^2+3}$ $\quad f'(4)=\frac{80}{35}$

$f(4)=5\cdot\ln 35$ $\quad E(4)=0{,}51$

35. $f'(x)=\dfrac{36x^3}{3x^4+4}$ $\quad f'(1)=\dfrac{36}{7}$

$f(1)=3\cdot\ln 7$ $\quad E(1)=\dfrac{36}{21\cdot\ln 7}=0{,}88$

36. $f'(x)=-8(169-4x)$ $\quad f'(6)=-8\cdot 145$

$f(6)=145^2$ $\quad E(6)=-\dfrac{48}{145}=-0{,}33$

37. $f'(x)=\dfrac{-12x^2}{(x^3+2)^2}$ $\quad f'(2)=-\dfrac{48}{100}$

$f(2)=\dfrac{4}{10}$ $\quad E(2)=-2{,}4$

38. $f'(p)=-\dfrac{20}{(1+2p)^3}$ $\quad f'(5)=-\dfrac{20}{11^3}$

$f(5)=\dfrac{5}{11^2}$ $\quad E(5)=-1{,}8181$

39. $D'(p)=-\dfrac{8p}{(p^2+3)^2}$ $\quad D'(3)=-\dfrac{1}{6}$

$D(3)=\dfrac{1}{3}$ $\quad E(3)=\dfrac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}\cdot 3=-1{,}5$

40. $f'(p)=-\dfrac{16}{(1+2p)^3}$ $\quad f'(5)=-\dfrac{16}{11^3}$

$f(5)=\dfrac{4}{11^2}$ $\quad E(5)=\dfrac{-\frac{16}{11^3}}{\frac{4}{11^2}}\cdot 5=-1{,}8181$

41. $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1000-4x}}$ $\quad f'(40) = -\dfrac{2}{\sqrt{840}}$

$f(40) = \sqrt{840}$ $\quad E(40) = -0{,}0952$

42. $f'(x) = \dfrac{5}{3}\cdot(5x-3)^{\frac{2}{3}}\cdot 5$ $\quad f'(1) = \dfrac{25}{3}\cdot\sqrt[3]{4}$

$f(1) = \sqrt[3]{32}$ $\quad E(1) = \dfrac{25}{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = 4{,}16$

43. $f'(x) = 2\cdot e^{3-0{,}02x} + 2x\cdot e^{3-0{,}02x}\cdot(-0{,}02) = 2\cdot e^{3-0{,}02x}(1-0{,}02x)$

$f'(10) = 1{,}6\cdot e^{2{,}8}$ $\quad f(10) = 20\cdot e^{2{,}8}$ $\quad E(10) = \dfrac{1{,}6\cdot e^{2{,}8}\cdot 10}{20\cdot e^{2{,}8}} = 0{,}8$

44. $f'(x) = 7\cdot e^{5-0{,}03x} + 7x\cdot e^{5-0{,}03x}\cdot(-0{,}03)$

$f'(50) = -3{,}5\cdot e^{3{,}5}$ $\quad f(50) = 350\cdot e^{3{,}5}$ $\quad E(50) = -0{,}5$

45. $f'(x) = 2^x\cdot\ln 2\cdot x + 2^x$ $\quad f'(5) = 2^5\cdot(5\cdot\ln 2 + 1)$

$f(5) = 5\cdot 2^5$ $\quad E(5) = 5\cdot\ln 2 + 1 = 4{,}47$

46. $f'(x) = e^{-3x+6} + x\cdot e^{-3x+6}\cdot(-3)$ $\quad f'(4) = -11\cdot e^{-6}$

$f(4) = 4\cdot e^{-6}$ $\quad E(4) = -11$

47. $f'(x) = 4\cdot e^{-3x} - 12x\cdot e^{-3x}$ $\quad f'(3) = -32e^{-9}$

$f(3) = 12e^{-9}$ $\quad E(3) = -8$

48. $f'(x) = e^{-4x-1} + x\cdot e^{-4x-1}\cdot(-4)$ $\quad f'(2) = -7\cdot e^{-9}$

$f(2) = 2\cdot e^{-9}$ $\quad E(2) = -7$

49. $f'(x) = e^{-5x+2} + x \cdot e^{-5x+2} \cdot (-5)$ $\quad f'(2) = -9 \cdot e^{-8}$

$f(2) = 2 \cdot e^{-8}$ $\quad E(2) = -9$

50. $f'(x) = \dfrac{-8 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2}$ $\quad f'(5) = -\dfrac{58}{21^2}$

$f(5) = \dfrac{10}{21}$ $\quad E(5) = -\dfrac{29}{21} = -1{,}38$

51. $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2 + x - 2) - x^2(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x^2 + x - 2)^2}$

$f'(3) = \dfrac{3}{100}$ $\quad f(3) = \dfrac{9}{10}$ $\quad E(3) = -0{,}1$

52. $K'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot x^2 - (2 + x^3) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^3 - 4}{x^3}$

$K'(2) = \dfrac{4}{8}$ $\quad K(2) = \dfrac{10}{4}$ $\quad E(2) = 0{,}4$

6. Kétváltozós függvények

1. $f'_x(x;y) = \left(4x^2 + 2x^3y^4 - 2y + 5\right)'_x = 8x + 2y^4 \cdot 3x^2 = 8x + 6x^2y^4$

$f'_y(x;y) = \left(4x^2 + 2x^3y^4 - 2y + 5\right)'_y = 2x^3 \cdot 4y^3 - 2 = 8x^3y^3 - 2$

$f''_{xx}(x;y) = \left(8x + 6x^2y^4\right)'_x = 8 + 6y^4 \cdot 2x = 8 + 12xy^4$

$f''_{yy}(x;y) = \left(8x^3y^3 - 2\right)'_y = 8x^3 \cdot 3y^2 = 24x^3y^2$

$f''_{xy}(x;y) = \left(8x + 6x^2y^4\right)'_y = 6x^2 \cdot 4y^3 = 24x^2y^3$

$f''_{yx}(x;y) = \left(8x^3y^3 - 2\right)'_x = 8y^3 \cdot 3x^2 = 24x^2y^3$

Vegyük észre: $\quad f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y)$

2. $f'_x(x;y) = \left(\dfrac{x+2}{y^2}\right)'_x = \left((x+2) \cdot y^{-2}\right)'_x = y^{-2} \cdot 1 = y^{-2}$

$f'_y(x;y) = \left(\dfrac{x+2}{y^2}\right)'_y = \left((x+2) \cdot y^{-2}\right)'_y = (x+2) \cdot \left(-2y^{-3}\right) = -2xy^{-3} - 4y^{-3}$

$f''_{xx}(x;y) = \left(y^{-2}\right)'_x = 0$

$$f''_{yy}(x;y)=\left(-2xy^{-3}-4y^{-3}\right)'_y=-2x\cdot\left(-3y^{-4}\right)+12y^{-4}=6xy^{-4}+12y^{-4}$$

$$f''_{xy}(x;y)=\left(y^{-2}\right)'_y=-2y^{-3}$$

$$f''_{yx}(x;y)=\left(-2xy^{-3}-4y^{-3}\right)'_x=-2y^{-3}\cdot 1=-2y^{-3}$$

3. $$f'_x(x;y)=\left(\frac{x^2+2y}{y^3}\right)'_x=\frac{1}{y^3}\cdot 2x=\frac{2x}{y^3}$$

$$f'_y(x;y)=\left(\frac{x^2+2y}{y^3}\right)'_y=\frac{2\cdot y^3-\left(x^2+2y\right)\cdot 3y^2}{y^6}=\frac{2y^3-3x^2y^2-6y^3}{y^6}=\frac{-4y^3-3x^2y^2}{y^6}$$

4. $$f'_x(x;y)=\left(8x^2+6y-2x^3y^2\right)'_x=16x-6x^2y^2$$

$$f'_y(x;y)=\left(8x^2+6y-2x^3y^2\right)'_y=6-4x^3y$$

5. $$f'_x(x;y)=\left(5x^2y^7-3xy^3+10x-4y+2\right)'_x=10xy^7-3y^3+10$$

$$f'_y(x;y)=\left(5x^2y^7-3xy^3+10x-4y+2\right)'_y=35x^2y^6-9xy^2-4$$

6. $$f'_x(x;y)=\left(\frac{y^2+5x^3y}{xy-5y}\right)'_x=\frac{10x^3y^2-75x^2y^2-y^3}{(xy-5y)^2}$$

$$f'_y(x;y)=\left(\frac{y^2+5x^3y}{xy-5y}\right)'_y=\frac{xy^2-5y^2+50x^3y}{(xy-5y)^2}$$

7. $$f'_x(x;y)=\left(\frac{2xy^2+6x^4}{3x-5x^2y}\right)'_x=\frac{54x^4+10x^2y^3-60x^5y}{\left(3x-5x^2y\right)^2}$$

$$f'_y(x;y)=\left(\frac{2xy^2+6x^4}{3x-5x^2y}\right)'_y=\frac{12x^2y-10x^3y^2+30x^5}{\left(3x-5x^2y\right)^2}$$

8. $$f'_x(x;y)=\left(2\sqrt{7x-3y+25x^2y}\right)'_x=\frac{7+50xy}{\sqrt{7x-3y+25x^2y}}$$

$$f'_y(x;y)=\left(2\sqrt{7x-3y+25x^2y}\right)'_y=\frac{-3+25x^2}{\sqrt{7x-3y+25x^2y}}$$

9. $$f'_x(x;y)=\left(3\ln\left(12y^3-5xy+10\right)\right)'_x=\frac{-15y}{12y^3-5xy+10}$$

$$f'_y(x;y)=\left(3\ln\left(12y^3-5xy+10\right)\right)'_y=\frac{108y^2-15x}{12y^3-5xy+10}$$

10. $f'_x(x;y)=\left(5e^{x^4y^2-2x^3+4y^2}\right)'_x=5e^{x^4y^2-2x^3+4y^2}\cdot\left(4x^3y^2-6x^2\right)$

$f'_y(x;y)=\left(5e^{x^4y^2-2x^3+4y^2}\right)'_y=5e^{x^4y^2-2x^3+4y^2}\cdot\left(2x^4y+8y\right)$

11. $f'_x(x;y)=\left(2^{5x^3y^4-7y+x^5-1}\right)'_x=2^{5x^3y^4-7y+x^5-1}\cdot\ln 2\cdot\left(15x^2y^4+5x^4\right)$

$f'_y(x;y)=\left(2^{5x^3y^4-7y+x^5-1}\right)'_y=2^{5x^3y^4-7y+x^5-1}\cdot\ln 2\cdot\left(20x^3y^3-7\right)$

12. $f'_{3x}(x,y)=\left(2y^5+8y\right)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 2x$

$f'_{3y}(x,y)=\left(10y^4+8\right)\cdot\ln\left(x^2+y^3\right)+\left(2y^5+8y\right)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 3y^2$

13. $f'_{3x}(x,y)=2\cdot\ln\left(x^2+y^3\right)+(2x+8y)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 2x$

$f'_{3y}(x,y)=8\cdot\ln\left(x^2+y^3\right)+(2x+8y)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 3y^2$

14. $f'_{2x}(x,y)=y^4\cdot 3\cdot\left(4x^2-3\right)^2 8x$

$f'_{2y}(x,y)=4y^3\cdot\left(4x^2-3\right)^3$

15. $f'_{2x}(x,y)=4y^2\cdot 5\cdot\left(x^5-3x\right)^4\cdot\left(5x^4-3\right)$

$f'_{2y}(x,y)=8y\left(x^5-3x\right)^5$

16. $f'_{3x}(x,y)=\dfrac{2\cdot e^{-2+3y}}{y^4}$

$f'_{3y}(x,y)=\dfrac{2x\cdot e^{-2+3y}\cdot 3\cdot y^4-2x\cdot e^{-2+3y}\cdot 4y^3}{y^8}$

17. $f'_{3x}(x,y)=\dfrac{8x}{y^7}$

$f'_{3y}(x,y)=-\dfrac{28x^2}{y^8}$

18. $f'_{3x}(x,y)=\dfrac{8x}{y^7}$

$f'_{3y}(x,y)=\dfrac{2y^7-\left(4x^2+2y\right)\cdot 7y^6}{y^{14}}$

19. $f'_{2x}(x,y)=-\dfrac{7y^2}{\left(3x^4-2\right)^2}\cdot 12x^3$

$f'_{2y}(x,y)=\dfrac{14y}{3x^4-2}$

20. $f'_{3x}(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 2x\cdot 6y^2$

$f'_{3y}(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 3y^2\cdot 6y^2+\ln\left(x^2+y^3\right)\cdot 12y$

21. $f'_{2x}(x,y)=\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot\sqrt{y^5-2y}$

$f'_{2y}(x,y)=\ln x^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(y^5-2y\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(5y^4-2\right)$

22. $f'_{3x}(x,y)=\ln y\cdot e^{-2x+3y}\cdot(-2)$

$f'_{3y}(x,y)=\dfrac{1}{y}\cdot e^{-2x+3y}+\ln y\cdot e^{-2x+3y}\cdot 3$

23. $f'_{3x}(x,y)=\frac{1}{4x^2y^3}\cdot 8xy^3$

$f'_{3y}(x,y)=\frac{1}{4x^2y^3}\cdot 12x^2y^2$

24. $f_{2x}{}'(x,y)=\frac{1}{x^5}\cdot 5x^4\cdot\sqrt[3]{y^4-7y}$

$f_{2y}{}'(x,y)=\ln x^5\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(y^4-7y\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4y^3-7\right)$

25. $f'_{2x}(x,y)=\frac{1}{3x^5}\cdot 15x^4\cdot\sqrt[7]{y^3-7y}$

$f'_{2y}(x,y)=\ln 3x^5\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(y^3-7y\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(3y^2-7\right)$

26. $f'_{2x}(x,y)=7^{y^2+2}\cdot e^{5x^4+3x}\cdot\left(20x^3+3\right)$

$f'_{2y}(x,y)=7^{y^2+2}\cdot\ln 7\cdot 2y\cdot e^{5x^4+3x}$

27. $f'_{1x}(x,y)=e^{5x^3-4x}\cdot\left(15x^2-4\right)\cdot 2^{7y^3+10y^2}$

$f'_{1y}(x,y)=e^{5x^3-4x}\cdot 2^{7y^3+10y^2}\cdot\ln 2\cdot\left(21y^2+10y\right)$

28. $f'_{2x}(x,y)=5^y\cdot e^{7x^4+16x}\cdot\left(28x^3+16\right)$

$f'_{2y}(x,y)=5^y\cdot\ln 5\cdot e^{7x^4+16x}$

29. $f_{1x}{}'(x,y)=3^y\cdot 6\cdot\left(2x^5+5y\right)^5\cdot 10x^4$

$f_{1y}{}'(x,y)=3^y\cdot\ln 3\cdot\left(2x^5+5y\right)^6+3^y\cdot 6\cdot\left(2x^5+5y\right)^5\cdot 5$

30. $f'_{1x}(x,y)=6^x\cdot\ln 6\cdot\left(3x^2+8y\right)^7+6^x\cdot 7\cdot\left(3x^2+8y\right)^6\cdot 6x$

$f'_{1y}(x,y)=6^x\cdot 7\cdot\left(3x^2+8y^2\right)^6\cdot 16y$

31. $f'_{1x}(x,y)=6^{5x^3-4x}\cdot\ln 6\cdot\left(15x^2-4\right)\cdot\ln\left(7y^3+10y^2\right)$

$f'_{1y}(x,y)=6^{5x^3-4x}\cdot\frac{1}{7y^3+10y^2}\cdot\left(21y^2+20y\right)$

32. $f'_x(x;y)=\left(2y^4\cdot e^{3x^2y^3-5xy^4}\right)'_x=2y^4\cdot e^{3x^2y^3-5xy^4}\left(9x^2y^2-5y^4\right)$

33. $f'_{1x}(x,y)=3y\cdot e^{3x^3-7y^4+2}\cdot 9x^2$

34. $f'_{1x}(x,y)=4\cdot\left(2x^5+6y^2-6xy\right)^3\cdot\left(10x^4-6y\right)$

35. $f'_{2x}(x,y)=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{8y^3-7y^5}$

36. $f'_{2x}(x,y)=3\cdot x^2\cdot 2^{8y^3-7y^5}$

37. $f'_{1x}(x,y)=3^{7x^2-6}\cdot\ln 3\cdot 14x\cdot\ln\left(5y^4-8y\right)$

38. $f'_{1x}(x,y)=4^y\cdot\frac{1}{2x^5+5x^4-1}\cdot\left(10x^4+20x^3\right)$

39. $f'_y(x;y)=\left(2x\cdot\ln\left(x^3y^2+5x-3y^8-1\right)\right)'_y=2x\cdot\frac{1}{x^3y+5x-3y^8-1}\left(2x^3y-24y^7\right)$

40. $f_{2y}'(x,y)=4x^2\cdot 3(y^5-2y)^2\cdot(5y^4-2)$

41. $f_{2y}'(x,y)=12y^3\cdot\sqrt{2x^8-3x^3}$

42. $f_{3y}'(x,y)=\frac{1}{y}\cdot e^{-2x+3y}+\ln y\cdot e^{-2x+3y}\cdot 3$

43. $f_{1y}'(x,y)=\frac{21y^6-5x}{2x^5+3y^7-5xy}$

44. $f_{1y}'(x,y)=\frac{18y^2-5x}{4x^7+6y^3-5xy}$

45. $f_y'(x,y)=e^{8x^3-4x}\cdot 5^{6y^3+10y^2}\cdot(\ln 5)\cdot(18y^2+20y)$

46. $f_x'(x;y)=-2x-4$

$f_y'(x;y)=-2y+6$

$$\left.\begin{aligned}-2x-4&=0\\-2y+6&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\qquad x=-2\qquad y=3$$

$P(-2;3)$ stacionárius pont (itt lehet szélsőérték)

$f_{xx}''(x;y)=-2$

$f_{yy}''(x;y)=-2$

$f_{xy}''(x;y)=0$

$D(x;y)=f_{xx}''(x;y)\cdot f_{yy}''(x;y)-\left[f_{xy}''(x;y)\right]^2$

$D(-2;3)=-2\cdot(-2)-0^2=4>0 \quad\Rightarrow\quad$ van szélsőérték

$f_{xx}''(x;y)=-2<0 \quad\Rightarrow\quad$ maximum van

$\boxed{MAX(-2;3;-5)}$

47. Lokális szélsőértéke ott lehet a függvénynek, ahol az első parciális deriváltak nullával egyenlők.

$f_x'(x;y)=6x+3y$

$f_y'(x;y)=2y+3x+1$

$$\left.\begin{aligned}6x+3y&=0\\3x+2y+1&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=0\\3x+2y+1&=0\end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow y=-2x$

$3x+2(-2x)+1=0$

$3x-4x+1=0$

$-x+1=0$

$x=1$

$y=-2\cdot 1$

$y=-2$

$P(1;-2)$ stacionárius pont (itt lehet szélsőérték)

$$f''_{xx}(x;y)=(6x+3y)'_x=6$$
$$f''_{yy}(x;y)=(3x+2y+1)'_y=2$$
$$f''_{xy}(x;y)=(6x+3y)'_y=3$$
$$D(x;y)=f''_{xx}(x;y)\cdot f''_{yy}(x;y)-\left[f''_{xy}(x;y)\right]^2$$
$$D(1;-2)=6\cdot 2-3^2=3$$

D pozitív, tehát van szélsőérték
(Ha D negatív, nincs szélsőérték.)
A szélsőérték jellegét az $f''_{xx}(1;-2)$ előjele dönti el.
Mivel $f''_{xx}(1;-2)$ pozitív, ezért a $P(1;-2)$ pontban minimum van.
Minimumérték:

$$f(1;-2)=3\cdot 1^2+(-2)^2+3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)+2=1$$
$$\boxed{MIN(1;-2;1)}$$

48. $f'_x=-2x+2=0$

$f'_y=-2y-4=0$ $\quad$ $P(1,-2)$ stac. pont

$f''_{xx}=-2$ $\quad$ $f''_{yy}=-2$ $\quad$ $f''_{xy}=0$

$D=4>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{MAX(1;-2;4)}$

49. $f(x,y)=(1-x)^2+(2+y)^2-4$

$f'_x=-2+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$

$f'_y=4+2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=-2$ $\quad$ $P(1,-2)$ stac. pont

$f''_{xx}=2$ $\quad$ $f''_{yy}=2$ $\quad$ $f''_{xy}=0$

$D=4>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{MIN(1;-2;-4)}$

50. $f'_x=2x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$ $\qquad$ $f'_y=8y-16=0 \quad \Rightarrow \quad y=2$

$P(-1;2)$ stac. pont

$f''_{xx}=2$ $\quad$ $f''_{yy}=8$ $\quad$ $f''_{xy}=0$ $\quad$ $D=16>0$

$\boxed{MIN(-1;2;-3)}$

51. $f'_x=8x-16=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$

$f'_y=2y+6=0 \quad \Rightarrow \quad y=-3$ $\quad$ $P(2;-3)$ stac. pont

$f''_{xx}=8$ $\quad$ $f''_{yy}=2$ $\quad$ $f''_{xy}=0$ $\quad$ $D=16>0 \quad \Rightarrow \quad MIN(2;-3;-5)$

52. $f'_x=4x-3y=0$

$f'_y=-3x+3y^2=0$ $\quad$ $P_1(0,0)$ $\quad$ $P_2\left(\frac{9}{16},\frac{3}{4}\right)$

$f''_{xx}=4$ $\quad$ $f''_{yy}=6y$ $\quad$ $f''_{xy}=-3$

$D_1=-9<0 \quad \rightarrow \quad$ nincs szélsőérték

$D_2 = 9 > 0 \qquad f''_{xx} = 4 > 0 \qquad \boxed{MIN\left(\frac{9}{16};\frac{3}{4};\frac{27}{128}\right)}$

53. $f(x,y) = (1-3x)^2 + (2+2y)^2 - 4$

$f'_x = -6(1-3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

$f'_y = 4(2+2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \qquad P\left(\frac{1}{3},-1\right)$ stac. pont

$f''_{xx} = 18 \qquad f''_{yy} = 8 \qquad f''_{xy} = 0 \qquad D = 144 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{MIN\left(\frac{1}{3};-1;-4\right)}$

7. Integrálszámítás

1 – 36. feladatok: Órai megoldásra javasoltak.

37. $\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}\ln|x| + C$

38. $2\ln\left|x^2+1\right| + C$

39. $3\sqrt{x^2+1} + C$

40. $\frac{1}{5}\ln\left|5e^x+2\right| + C$

41. $\frac{\left(e^x+2\right)^2}{2} + C$ vagy $\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + C$

42. $\frac{7}{3}\left(2e^x+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$

43. $\frac{-3}{2\left(e^x+2\right)^2} + C$

44. $\frac{20}{9}\cdot\sqrt[4]{\left(3e^x+1\right)^3} + C$

45. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$

46. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

47. $12\cdot x^{\frac{1}{6}} + C$

48. $-\frac{5}{x} + \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{x^6}{2} + 2x + C$

49. $x^2 - \frac{3}{2}x + 3\ln|x| + C$

50. $\frac{2}{9}\ln\left|3x^3-10\right| + C$

51. $-\frac{5}{42}(6x-1)^{-7} + C$

52. $-\frac{14}{5}\left(3-x^2\right)^{\frac{5}{4}} + C$

53. $-\frac{2}{3}\ln\left|2-4x^3\right| + C$

54. $-\frac{5}{4}\left(2+x^2\right)^{-2} + C$

55. $\left(e^x+1\right)^2 + C$

56. $\frac{1}{10}\cdot e^{10x-3} + C$

57. $-\frac{1}{2}\cdot e^{1-2x^3}+C$

58. $\frac{1}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

59. $\frac{5}{4}\ln\left|3x^4+2x^2\right|+C$

60. $\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{1}{6x^3}+C$

61. $\left(9x^2-6x\right)^{\frac{2}{3}}+C$

62. $-\frac{1}{\ln^3 x}+C$

63. $\frac{(2x-5)^8}{16}+C$

64. $\frac{5}{2}\cdot e^{x^2-4x+1}+C$

65. $\frac{5}{7}(7x+5)^{\frac{2}{5}}+C$

66. $\frac{4}{11}\ln|11x-3|+C$

67. $\frac{2x^8}{8}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{4x^{-2}}{-2}+c$

68. $\frac{7\cdot 4^x}{\ln 4}+\frac{x^3}{15}+\frac{\ln|x|}{3}+c$

69. $\int\left(4x^{-3}-2x+\frac{5}{x}\right)dx=-2x^{-2}-x^2+5\ln|x|+c$

70. $\int\left(\frac{1}{3x}-\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^{-\frac{1}{2}}}{3}\right)dx=\frac{\ln|x|}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{8\sqrt{x}}{3}+c$

71. $\int\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-2\ln|x|+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+c$

72. $x^5-\frac{7^x}{\ln 7}-\frac{3x^{-5}}{-5}+c$

73. $\int\left(\frac{3}{2}\cdot x^{-3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-3\ln|x|+\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+c$

74. $\frac{3}{2}\cdot\int 2\cdot(2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$

75. $4\cdot\int 3x^2\cdot\left(x^3+8\right)^{-\frac{5}{3}}dx=4\cdot\frac{\left(x^3+8\right)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+c$

76. $\frac{11}{3}\cdot\int 3x^2\cdot\left(x^3+8\right)^{\frac{7}{3}}dx=\frac{11}{3}\cdot\frac{\left(x^3+8\right)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}+c$

77. $\frac{3}{10}\cdot\int(10x^4-20)(2x^5-20x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{10}\frac{(2x^5-20x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$

78. $\frac{3}{8}\cdot\int(8x^3-8x)\cdot(2x^4-4x^2)^{\frac{7}{2}}dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{(2x^4-4x^2)^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+c$

79. $\int\sqrt[6]{x^4}dx=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C$

80. $\frac{3}{10}\int(10x^4-20)(2x^5-20x)^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{3}{10}\frac{(2x^5-20x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C$

81. $\frac{7}{4}\cdot\int 4x\cdot(2x^2-4)^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{7}{4}\cdot\frac{(2x^2-4)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}+c$

82. $\frac{4}{15}\cdot\int 15x^3\cdot(3x^5+12)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{4}{15}\cdot\frac{(3x^5+12)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$

83. $7\cdot\int 3x^2\cdot(x^3+8)^{-\frac{4}{5}}dx=7\cdot\frac{(x^3+8)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}+c$

84. $\frac{\ln|3x^2+8|}{3}+c$

85. $\frac{5\ln^4 x}{4}+c$

86. $\frac{1}{2}\cdot\int\frac{6x^2-4}{2x^3-4x}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln|2x^3-4x|+c$

87. $\frac{5}{15}\int\frac{15x^4-6x^2}{3x^5-2x^3}dx=\frac{1}{3}\cdot\ln|3x^5-2x^3|+c$

88. $2\cdot\ln|x+3|+c$

89. $\frac{1}{3}\cdot\int\frac{12x^2-6x}{4x^3-3x^2}dx=\frac{1}{3}\cdot\ln(4x^3-3x^2)+c$

90. $\frac{6}{10}\cdot\int\frac{10x^4}{2x^5+8}dx=\frac{6}{10}\cdot\ln|2x^5+8|+c$

91. $\frac{7}{6}\cdot\int(12x^2+6)\cdot e^{4x^3+6x}dx=\frac{7}{6}\cdot e^{4x^3-6x}+c$

92. $\frac{5}{3}\cdot\int(6x^2+9)\cdot e^{2x^3+9x}dx=\frac{5}{3}\cdot e^{2x^3+9x}+c$

93. $\frac{7}{6}\cdot\int 6x^2\cdot e^{2x^3-4}dx=\frac{7}{6}\cdot e^{2x^3-4}+c$

94. $2\cdot e^{3x^4+5x}+c$

95. $\frac{3}{2}\int(6x^2-2x)\cdot e^{2x^3-x}\,dx=\frac{3}{2}\cdot e^{2x^3-x^2}+c$

96. $\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2=-\frac{2}{3}$

97. $$5\int_{-1}^{1}(3x+4)^{-3}dx = 5\cdot\left[\frac{\frac{(3x+4)^{-2}}{-2}}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{5}{6}\left[\frac{1}{(3x+4)^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{40}{49}$$

98. $$\left[\frac{3}{2}\cdot\ln\left|3x^2+2x\right|\right]_{-3}^{-2} = -1{,}45$$

99. $$\frac{3}{10}\int_{-1}^{0}10x\cdot e^{5x^2-1}dx = \frac{3}{10}\left[e^{5x^2-1}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{10}\cdot\left(e^{-1}-e^{4}\right) = -16{,}27$$

100. $$\left[2x\cdot\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^1 - \int_0^1 2\cdot\frac{e^{5x}}{5}dx = \frac{2}{5}\cdot\left[x\cdot e^{5x}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\cdot\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\cdot e^5 - \frac{2}{25}\cdot e^5 + \frac{2}{25} = 47{,}57$$

101. $$\left[\frac{2}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left[\frac{2}{3}x^3 + x + \frac{4\sqrt{x}}{3}\right]_1^2 = 6{,}21$$

102. $$\int_1^2\left(4x^2+1+\frac{3}{2x}\right)dx = \left[\frac{4x^3}{3} + x + \frac{3}{2}\cdot\ln|x|\right]_1^2 = 11{,}37$$

103. $$\int_1^2\left(2x^2+1+\frac{7}{2x}\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + x + \frac{7}{2}\cdot\ln|x|\right]_1^2 = 8{,}09$$

104. $$\frac{7}{6}\cdot\int_1^2(12x+18)\cdot\left(6x^2+18x\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{6}\cdot\left[\frac{\left(6x^2+18x\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \frac{7}{3}\cdot\left(\sqrt{60}-\sqrt{24}\right) = 6{,}64$$

105. $$\left[\frac{\left(1-e^x\right)^5}{5}\cdot(-1)\right]_0^1 = 2{,}996$$

106. $$\frac{1}{4}\cdot\int_1^6 4\cdot(4x+3)^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(4x+3)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_1^6 = \frac{3}{4}\cdot\left[\sqrt[3]{4x+3}\right]_1^6 = \frac{3}{4}\cdot\left(\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{7}\right) = 0{,}8153$$

107. $\int_0^1 \left(12x^2+8\right)\cdot\left(x^3+2x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{\left(x^3+2x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 4}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=13{,}86$

108. $\left[\frac{3}{10}\cdot\left(2x^4+4x\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=26{,}45$

109. $\frac{2}{6}\int_0^1 6x\cdot\left(3x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}=1{,}33$

110. $\int_1^2 \left(15x^3+6x\right)\cdot\left(4x^2+5x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{\left(4x^2+5x^4\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3}{\frac{1}{2}\cdot 4}\right]_1^2=\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{96}-3\right)=10{,}197$

111. $\left[\frac{e^{x^6+2}}{2}\right]_0^1=\frac{e^3}{2}-\frac{e^2}{2}=6{,}3482$

112. $7\cdot\left[e^{x^3+2x+4}\right]_{-2}^1=7\cdot\left(e^7-e^{-8}\right)=7676{,}43$

113. $\left[5e^{x^3+2x+4}\right]_{-2}^1=5\left(e^7-e^{-8}\right)=5483{,}16$

114. $\frac{1}{2}=0{,}5$

115. $e^{-3}=0{,}05$

116. ∞

117. 8,67

118. 10,67

119. 13,17

120. 4,5

121. 114,33

122. 0,67

123. $f(x)=2x^2-2x-24=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=4 \quad x_2=-3$

$\int_{-3}^4 \left(2x^2-2x-24\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-x^2-24x\right]_{-3}^4=-114{,}33 \qquad T=114{,}33\text{ te}$

124. $f(x)=6x^3-12x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0 \quad x_2=2$

$\int_0^2 \left(6x^3-12x^2\right)dx=\left[\frac{6x^4}{4}-\frac{12x^3}{3}\right]_0^2=-8 \quad\rightarrow\quad T=8\text{ te}$

125. $f(x)=4x^2+24x+20=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-1 \quad x_2=-5$

$\int_{-5}^{-1} \left(4x^2+24x+20\right)dx=4\cdot\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right]_{-5}^{-1}=-42{,}67 \quad\Rightarrow\quad T=42{,}67\text{ te}$

126. $f(x)=2x^2-5x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{3}{2} \quad x_2=4$

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{4}\left(2x^2-5x-12\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-12x\right]_{-\frac{3}{2}}^{4}=-55{,}49 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}=55{,}49\text{ te}$$

127. $(x-1)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_1=-1 \quad \mathrm{x}_2=3$

$$\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=-\frac{32}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{T}=10{,}67\text{ te}$$

128. $(x+2)^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_1=-3 \quad \mathrm{x}_2=-1$

$$\int_{-3}^{-1}\left(x^2+4x+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right]_{-3}^{-1}=-\frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{T}=1{,}33\text{ te}$$

129. $x^3-4x=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-2 \quad x_2=0 \quad x_3=2$

$$\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=4 \quad \rightarrow \quad \mathrm{T}_1=4\text{ te}$$

$$\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=-4 \quad \rightarrow \quad \mathrm{T}_2=4\text{ te}$$

$T_1+T_2=8$ te

130. $-x^2+3x-1=8x+5 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \quad x_2=-2$

$$\int_{-3}^{-2}\left(x^2+5x+6\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{-2}=-0{,}17 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}=0{,}17\text{ te}$$

131. $-2x^2+1=-3x^2+3x+1 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad x_2=3$

$$\int_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=-4{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}=4{,}5\text{ te}$$

132. $x^2-8x+17=-x^2+14x-39 \qquad \mathrm{x}_1=4 \quad \mathrm{x}_2=7$

$$\int_{4}^{7}\left(2x^2-22x+56\right)dx=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{11x^2}{2}+28x\right]_{4}^{7}=-9 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}=9\text{ te}$$

133. $6x^2+8x-20=x^2-2x+20$

$5x^2+10x-40=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-4 \quad x_2=2$

$$\int_{-4}^{2}\left(5x^2+10x-40\right)dx=\left[\frac{5x^3}{3}+5x^2-40x\right]_{-4}^{2}=-180 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}=180\text{ te}$$

134. $6x^2+8x-20=x^2-2x+20$ $\quad x_1=-4 \quad x_2=2$

$$\int_{-4}^{2}\left(5x^2+10x-40\right)dx=\left[\frac{5x^3}{3}+5x^2-40x\right]_{-4}^{2}=-180 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{T}=180\text{ te}$$

135. $3x^2+7x-100=-2x^2+2x-40$ $\quad x_1=-4 \quad x_2=3$

$$\int_{-4}^{3}\left(5x^2+5x-60\right)dx=5\cdot\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-12x\right]_{-4}^{3}=-285{,}83 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{T}=285{,}83\text{ te}$$

136. $x^2-2x+1=x+1 \quad x^2-3x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0 \quad x_2=3$

$$\int_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=-4{,}5 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{T}=4{,}5\text{ te}$$

137. $x^2-3x-4=2x+2$ $\quad x^2-5x-6=0 \quad\rightarrow x_1=-1 \quad x_2=6$

$$\int_{-1}^{6}\left(x^2-5x-6\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-6x\right]_{-1}^{6}=-57{,}17 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{T}=57{,}17\text{ te}$$